DIPLOMARBEIT IM FACH MATHEMATIK

HERBERT JAEGER

"EDENFREIE ZELLULARRÄUME"

ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

JUNI 1987

Inhalt

1. Einordnung dieser Arbeit

1.1. Präliminarien 1

1.2. Ausgewählte Bemerkungen zur Geschichte 2

1.3. Einige Merkmale der Zellulären Theorie komplexer Systeme 7

1.4. These: Die Zelluläre Theorie komplexer Systeme und der algorithmische Aspekt vertragen sich nicht miteinander 10

1.5. Gründe für die Untersuchung edenfreier Zellularräume 13

1.6. Zusammenfassung der folgenden Abschnitte 17

2. Vorbereitungen

2.1. Grundlegende Begriffsbestimmungen 18

2.2. Eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der Zellularräume 20

2.3. Eine Matrixdarstellung für Zellularräume mit $r = 2$ 25

3. Balanciertheitsaussagen für edenfreie Zellularräume

3.1. Eine Verallgemeinerung eines Satzes von Bruckner 27

3.2. Eine Halbgruppe und ein Entscheidungsverfahren 33

3.3. Zellularräume mit Edenkonfigurationen 38

4. Zur Gestalt edenfreier Zellularräume

4.1. Konvergenz zur einfachen Gestalt 44

4.2. Eine charakteristische Zerlegung von k 48

4.3. Der Fall $k = p$ 53

4.4. Zwei hinreichende Bedingungen 55

4.5. Einige technische Bemerkungen 60

5. Schlußbemerkung 67

Symbolverzeichnis 70

Literaturverzeichnis 71

1. Einordnung dieser Arbeit

Übersicht über Abschnitt 1. Nach Definition der Grundbegriffe (1.1) gebe ich eine subjektive Schilderung der Geschichte des Gebrauchs zellulärer Modelle in der Mathematik und den Naturwissenschaften (1.2). Dabei versuche ich, zwei Aspekte dieses Gebrauchs, nämlich einerseits als Algorithmen/Automaten und andererseits als Simulation komplexer Systeme, besonders herauszuarbeiten. Ich versuche meine These zu belegen, daß eine Vermischung beider Aspekte zu Unklarheiten der Begriffsbildung geführt hat, welche sich zunächst in Verwirrungen bei der Behandlung von Garten-Eden-Problemen niederschlugen (1.2), aber auch in der heutigen theoretischen Physik gewisse Verzerrungen begünstigt (1.3, 1.4). Viele spätere Erscheinungen lassen sich bis auf den 'Ur-Zellularraum' John von Neumanns zurückverfolgen, weswegen dieser etwas ausführlicher dargestellt wird (1.2). Schließlich versuche ich, die Untersuchung gerade der edenfreien Zellularräume zu motivieren (1.5). Eine Zusammenfassung der folgenden Abschnitte bildet den Schluß (1.6).

1.1. Präliminarien

Zur ständigen Verwendung schicke ich einige vorläufige Definitionen voraus.

Ein Zellularraum (abgekürzt ZR) sei - in diesem Abschnitt - eine Struktur (G,S,u,f_o) mit:

- G ist die Menge der Punkte eines Gitters, - zumeist von $\mathbb{Z}^n$, aber auch endlicher Ausschnitte daraus und anderer;
- S ist eine endliche Symbolmenge;
- u ist eine Abbildung $u: G \to G^r$ und ordnet jedem Punkt des Gitters eine r-elementige Umgebung zu, - bei translationsinvariantem Gitter ist auch u in der Regel translationsinvariant;
- f_o ist die lokale Übergangsfunktion $f_o: S^r \to S$.

Eine Abbildung $c: G \to S$ heißt Konfiguration. Jeder Konfiguration c wird eine Nachfolgekonfiguration c' zugeordnet durch

$$c'(g) := f_o(c(u(g))) \qquad (g \in G),$$

d.h. durch 'parallele' Anwendung von f_o auf die durch u bestimmten lokalen Teilkonfigurationen in den Umgebungen der einzelnen Argumente g von c.
C sei die Menge aller Konfigurationen des Zellularraumes. Dann induziert f_o eine globale Übergangsfunktion $f: C \to C$ durch $f(c) := c'$. Ist $f^{-1}(c) = \emptyset$, so heißt c Edenkonfiguration. Ist $f(C) = C$, so heißt der Zellularraum edenfrei. Manchmal fordern wir auch noch zusätzlich einen ausgezeichneten Ruhezustand $s_o \in S$. Er erfüllt $f_o(s_o,\ldots,s_o) = s_o$. Existiert ein solcher Ruhezustand, dann wird für eine Konfiguration c die Menge $\{g \in G \mid c(g) \neq s_o\}$ als Träger von c bezeichnet. C_e ist die Menge der Konfigurationen mit endlichem Träger.

Diese mathematische Struktur wird nun in der Regel aufgefaßt als Modell eines arbeitenden Algorithmus' oder eines sich entwickelnden realen Systems, indem f als z e i t l i c h e Übergangsfunktion interpretiert wird. Diese beiden Aspekte 'Algorithmenmodell' und 'Modell realer Systeme' sind seit der Erfindung zellularer Modelle ihre Hauptanwendungen. Diese Zweiseitigkeit möchte ich im folgenden herausarbeiten. Vorläufig trage ich ihr dadurch Rechnung, daß ich von Zellularautomaten sprechen will, wenn der Aspekt des Algorithmus' hervorgehoben werden soll, und von Zellularräumen im anderen Fall. Die Verwendung des Ausdruckes "Zellularraum" im eben angedeuteten Sinne wird dabei mit seiner Verwendung im Sinne der eingangs gegebenen Definition zusammenfallen, so daß diese doppelte Bestimmung keinen Schaden anrichten wird. Bei Verzicht auf eine Differenzierung soll der neutrale Ausdruch zelluläres Modell Verwendung finden. - Es herrscht auf diesem Gebiet eine babylonische Sprach- und Sachverwirrung. Deswegen verzeihe man mir meine Pedanterie!

1.2. Ausgewählte Bemerkungen zur Geschichte

Das erste zelluläre Modell, welches das Licht der Mathematik erblickte, war der berühmte "29 state cellular automaton", den John von NEUMANN (1952) unter Anregung durch S. Ulam in den wesentlichen Zügen entwarf. Es stellt eine paradigmatische Synthese von Algorithmus und Realitätsmodell dar.

John von Neumann strebte eine "logical theory of automata" an. Er arbeitete mit bei der Entwicklung der ersten elektronischen Rechenanlage ENIAC und ihrer Nachfolger (vgl. BURKS 1966). Die dabei gemachten praktischen Erfahrungen beleuchten von Neumanns Auffassung vom Charakter der zu schaffenden Theorie, in deren Interpretation ich BURKS (1966) folge, indem ich folgendes akzentuierende Zitat hierherstelle:

> "All of this will lead to theories which are much less rigidly of an all-or-none nature than past and present formal logic. They will be of a much less combinatorial, and much more analytical, character. In fact, there are numerous indications to make us believe that this new system of formal logic will move closer to another discipline which has been little linked in the past with logic. This is thermodynamics, primarily in the form it was received from Boltzmann, and is that part of theoretical physics which comes nearest in some of its aspects to manipulating and measuring information. Its techniques are indeed much more analytical than combinatorial, ... " (von NEUMANN 1951, p. 304)

Dieser analytische, physikalische, ins Herstellbare gerichtete Denkansatz führt im später so genannten "kinematischen Modell der Selbstreproduktion" (von NEUMANN 1949) zunächst dazu, sich Automaten aus tatsächlichen, dreidimensionalen Komponenten zusammengesetzt zu denken, wie z.B. aus Gerüstelementen, Sensoren, "Nervenbahnen" und anderen. Außerdem stellt von Neumann in diesem Rahmen auch Überlegungen zu Mutation und Evolution von Automaten an, die er in einem "Nährmedium" aus umhertreibenden Bauelementen sich fortpflanzen und weiterentwickeln sieht. Dieser ganz auf Dinglichkeit und Wirklichkeit bis hin zur Komplexität des Biologischen angelegte Denkhintergrund prägt das "29 state cellular system", indem dort in der $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ - Ebene ein Zellularraum so eingerichtet wird, daß sich in ihm Analoga zu den oben erwähnten dreidimensionalen Komponenten definieren lassen. Der daraus dann aufgebaute "cellular automaton" mutet dementsprechend eher wie eine kunstvolle Ingenieurleistung als ein abstraktes mathematisches Modell an.

John von Neumann unterscheidet sprachlich noch "cellular system" von "cellular automaton". Ersteres entspricht dem, was ich in l.l. als Zellularraum definiert habe (von NEUMANN 1952, p. 132 ff). Unter dem "cellular automaton" versteht sein Erfinder eine spezielle Startkonfiguration, den "universal constructor", dessen Beschreibung den Hauptteil seiner Arbeit einnimmt. Meine These, daß das von Neumann'sche zelluläre Modell Züge eines Wirklichkeitsmodells aufweise, bezieht sich eher auf das "cellular system", das eben daraufhin angelegt ist, 'Dinge' wie Sensoren, Greifarme usw. auszubilden. Es kann durchaus

als Modell einer 'Ursuppe' verstanden werden, in der die einzelnen Zellen potentiell den umhertreibenden Bausteinen des kinematischen Modells entsprechen (vgl. zu dieser Auffassung besonders: von NEUMANN 1951, p. 315 f). Die gleich darzustellende Interpretation des von Neumann'schen Modells als Automat oder Algorithmus bezieht sich dagegen auf jene spezielle Startkonfiguration. Von Neumann unterscheidet zwar sprachlich, jedoch bleibt diese Differenzierung ohne Folgen. Das "cellular system" wird mit dem einzigen Ziel der Konstruktion des "cellular automaton" entworfen und um seiner selbst willen nicht näher untersucht. Beide Aspekte bilden hier bezüglich ihrer Verwendung eine Einheit.

Nun zur Auffassung des "cellular automaton" als Algorithmus.- Der "universal constructor" ist eine Konfiguration c_o mit einem endlichen Träger. Er wirkt auf den Betrachter wie ein auf den ruhenden Hintergrund $c_o \equiv s_o$ (fast überall) 'gemaltes' Bild einer Maschine, die bei geeigneter Eingabe auf ein gleichfalls in die Ebene gemaltes Inputband wie in einem Film einen "construction arm" entwickelt, der nun selbst 'malend' in der Nähe der Ausgangsmaschine die in der Eingabe bestimmte 'Tochtermaschine' produziert. Dieser "universal constructor" ist konstruktionsuniversal insofern, als er jede andere Maschine erzeugen kann; er ist berechnungsuniversal insofern, als er eine universale Turingmaschine produzieren kann - samt Eingabe und Startbefehl - ; und er ist selbstreproduzierend insofern, als er eine Kopie seiner selbst neben sich pflanzen kann - samt der eben dies perpetuierenden Eingabe. - Es ist klar, daß dieser "universal constructor" als Algorithmus, ähnlich wie dies auch mit Turingmaschinen gemacht wird, aufgefaßt werden kann. Eine notwendige Voraussetzung hierzu ist aber, daß er eine endliche Beschreibung zuläßt. Dies wird gewährleistet durch eben $c_o \equiv s_o$ (fast überall), oder anders ausgedrückt, durch $c_o \in C_e$. Der Ruhezustand gewinnt so eine unverzichtbare Funktion - zumindest auf den ersten Blick. Einige der bald zu skizzierenden Verwirrungen hängen hiermit zusammen.

Um meine Auffassung noch einmal kurz zusammenzufassen:
Das von Neumann'sche zelluläre Modell
- trägt als "cellular system" Züge eines Wirklichkeitsmodells und
- stellt als cellular automaton" einen Algorithmus dar.

Dabei gewinnt der Ruhezustand s_o nur in der zweiten Perspektive seine unverzichtbare Bedeutung. Beim Brauen einer Ursuppe drängt er sich nicht denknotwendig auf.

Ich möchte nun skizzieren, wie sich die Doppelgesichtigkeit dieses Stammvaters bis auf den heutigen Tag in der Tradition der Wirklichkeitsmodellierung durch zelluläre Modelle vererbt hat. Als eine deutliche Spur erweist sich hier zunächst die Geschichte der Garten-Eden-Problematik.

Der Ausdruck "Garden-of-Eden configuration" wird von MOORE (1962) zum ersten Mal verwendet. Er bezeichnet hier einen endlichen Ausschnitt einer Konfiguration, der keinen Vorgänger hat. Moore gibt aber verhängnisvollerweise keine formale Definition dieses Begriffs, obwohl er eine wichtige Aussage über ihn beweist. Motiviert wird die Betrachtung solcher "Garden-of-Eden configurations" durch die direkt an von Neumann anschließende Überlegung, daß solche Konfigurationen auf mindestens zwei Weisen mit den "abilities" einer "tesselation structure" zusammenhängen. Einerseits impliziert das Vorkommen solcher Konfigurationen eine Einschränkung, indem sie nämlich auch von einem "universal constructor" nicht erzeugt werden können. Andererseits ist ihr Vorkommen die Konsequenz einer anderen, von Moore unter der Zielvorgabe eines universalen Algorithmus' als unverzichtbar vermuteten Fähigkeit, nämlich, bildlich gesprochen, eines gewissen Vergessenkönnens (MOORE 1962, p. 30). Diese Konsequenz ist gerade die Aussage des "Garden-of-Eden theorem", welches den Kern jener Abhandlung ausmacht.

Dieses Theorem löste eine Reihe von Arbeiten aus, die sich mit Umkehrungen und Verallgemeinerungen desselben beschäftigen (MYHILL 1963; MYHILL 1970; AMOROSO und COOPER 1970; ARBIB 1969). Dabei rächte sich, daß Moore auf eine präzise Definition des Grundbegriffs verzichtet hatte. Durch weitere unscharfe Definitionen, mißverstandene stillschweigende Voraussetzungen und auch Fehlschlüsse kam es zu scheinbaren und echten Widersprüchen, zu einer "confusion in the Garden of Eden": Unter diesem Titel wurde die entstandene Verwirrung 1972 von SKYUM (veröffentlicht 1975) zuerst thematisiert, woraufhin sie von WACHSMUTH (1974) umfassend aufgearbeitet und geklärt wurde, um dann schließlich zum Anlaß einer systematischen Theorie verschiedener (einhundert verschiedener!) Garten-Eden-Begriffe gemacht zu werden (GOLZE 1975).

Diese den Ansatz von Neumanns direkt fortschreibenden Arbeiten scheinen mir deutlich vom algorithmischen Aspekt bestimmt zu sein. Nicht nur stellt sich Moores erste einschlägige Arbeit eindeutig auf dieser Bühne vor, sondern auch die ganze bemerkenswerte anschließende Verwirrung konnte nur dadurch entstehen, daß "GOE-configurations" (diese Abkürzung hatte sich inzwischen eingebürgert) aus nur unter dem Aspekt des Algorithmus' verständlichen Gründen irgendwie endlich zu sein hatten, - und daß dieses "irgendwie" mehrere nicht äquivalente Konkretionen gestattete, deren Verschiedenheiten aber leicht zu übersehen waren.

Als weiterführender Seitensproß jener Entwicklung lassen sich einige Arbeiten ansehen, die zu allgemeinen Aussagen

über Injektivität und Surjektivität der globalen Übergangsfunktion f gelangen, indem die verwirrungsstiftenden Endlichkeitsforderungen im wesentlichen aufgegeben werden (AMOROSO und PATT 1972; GROSKY 1978; BRUCKNER 1978/79). Diese Arbeiten behandeln Garten-Eden-Fragen als Angelegenheit der reinen Mathematik. Es werden keine Gedanken über Verwendungsmöglichkeiten von "cellular automata" als Algorithmen- oder Wirklichkeitsmodelle angestellt. (N.b.: "cellular automaton" heißt bei Grosky und Bruckner das, was von Neumann zuvor mit "cellular system" bezeichnet hatte - eine eher kontraintuitive Wandlung.) Gleich der erste dieser Aufsätze (AMOROSO und PATT 1972) gelangt zu einem gewissen Abschluß des Problemkreises, indem Entscheidungsverfahren für die Injektivität und für die Surjektivität von f im eindimensionalen Fall $G = \mathbb{Z}$ angegeben werden. Der Inhalt der Arbeit von GROSKY wird im Abschnitt 2.2. hier noch zur Sprache kommen. Der Aufsatz von BRUCKNER (1978/79) ist der letzte der hier angesprochenen Entwicklung. In ihm klingt ein doppelter Nachhall der oben erwähnten Verwirrung an. Erstens werden zwar Edenkonfigurationen bezüglich der globalen Übergangsfunktion f in C definiert, gleich darauf aber o h n e E r l ä u t e r u n g in den Raum gestellt:

> "This concept can be defined considering C_f [$\hat{=}$ C_e] as well."

Zweitens sind die dort zu findenden Beweise genauso gültig bei Verzicht auf die dort ohne Erklärung gemachte Einschränkung der Behauptungen auf Konfigurationen mit endlichem Träger, ohne daß dies der Autor zu bemerken scheint. Hierher gehört vielleicht auch die Bemerkung, daß die klärenden Arbeiten von Wachsmuth und Golze anscheinend nicht rezipiert worden sind. Ich fand sie nirgends zitiert und verdanke meine Bekanntschaft mit ihnen einem sehr unwahrscheinlichen Zufall: ich verwechselte den - unbeschrifteten - Rücken der Arbeit von Golze mit einem anderen und zog so aus einer ganzen Bibliothek gerade die Arbeit, die mir zu jenem Zeitpunkt am meisten helfen konnte!

In den 70er Jahren wurde durch die Explosion der Entwicklung und Anwendung von Computern die Erforschung zellulärer Modelle in neue tragende Koordinaten geknüpft. Dabei lassen sich zwei große Stränge herausarbeiten.

Einerseits wurden von einer anwendungsorientierten Informatik zelluläre Modelle als Paradigma für parallele Informationsverarbeitung verwendet. Diese dem Aspekt des Algorithmischen zuzuordnende Richtung war und ist sehr produktiv. Sie konnte auf eine gute Grundlegung in den 60er Jahren zurückgreifen, als wesentliche einschlägige Fragen schon gestellt und bearbeitet waren (vgl. z.B. VOLLMAR 1979). Dies Gebiet kann ich aber mangels eingehenderer Kenntnis nicht darstellen.

Andererseits wurden zelluläre Modelle in wachsendem Umfang von den klassischen Naturwissenschaften in ihre Dienste genommen. Dabei ist zunächst die Biologie zu nennen, die hier wohl auf die längste Tradition zurücksehen kann. Hier werden zelluläre Modelle in erster Linie zur Simulierung (oft morphogenetischer) natürlicher Vorgänge eingesetzt. Entsprechend dieser konkreten Anpassung werden sie dabei zuweilen so stark modifiziert, daß sie nicht mehr einer Theorie zellulärer Modelle im engeren Sinne dieser Arbeit zuzuordnen sind. Auch hier kann ich mangels Sachkenntnis nicht viel mehr sagen; entsprechend verhält es sich mit der Chemie. - Doch auch die Physik entdeckte zelluläre Modelle als Abbilder komplexer natürlicher Vorgänge.

In der Physik wird dabei aber zumeist grundsätzlicher und abstrakter zuwege gegangen. Diese Richtung, welcher ich auch meine Arbeit teilweise zuordnen würde, überschneidet sich mit den zuvorgenannten höchstens am Rande. Sie entwickelte sich eigenständig und wurde eher von der Physik selbst als von anderen Naturwissenschaften, der Informatik oder auch der Mathematik befruchtet. Ihr Hervortreten ist eine junge Erscheinung. Ein entschiedener Durchbruch läßt sich vielleicht im Jahr 1983 ansetzen, als in den USA und in Frankreich zwei Kongresse über zelluläre Modelle in den Naturwissenschaften ausgerichtet wurden (Berichte darüber: FARMER et al. 1984; DEMONGEOT et al. 1985).

Ich will nun zunächst eine interpretierende Schilderung der heutigen Gestalt dieser Ansätze in der Physik geben, um dann meine These von der Verzerrung derselben durch 'unbewußt wirkende Reste des algorithmischen Aspekts' zu belegen. Beides will ich in der Form der Aufzählung einzelner Gesichtspunkte erledigen - einer Zusammenschau würde der notwendige historische Abstand fehlen. Dabei will ich der Kürze halber die Verwendung zellulärer Modelle als abstraktes Bild komplexer physikalischer Systeme "zelluläre Theorie komplexer Systeme" nennen und dem Leser unverzagt mit der Abkürzung "ZTKS" entgegentreten.

1.3. Einige Merkmale der ZTKS

A. Erstes Ziel der ZTKS ist eine Klärung ihres Grundbegriffs "komplexes System". Dies geschieht vor allem durch Klassifikationsversuche und die Beschreibung auffallender Einzelphänomene. - Die von WOLFRAM (1984a)

gegebene Augenschein-Einteilung eindimensionaler Zellularräume in vier Klassen (vgl. Abb.1) hat sich als außerordentlich fruchtbar erwiesen. Sie wird von praktisch jeder späteren Arbeit in irgend einer Form berücksichtigt. Sie stellt zweifellos die vorläufig wichtigste grobe Orientierungshilfe in der ZTKS dar.

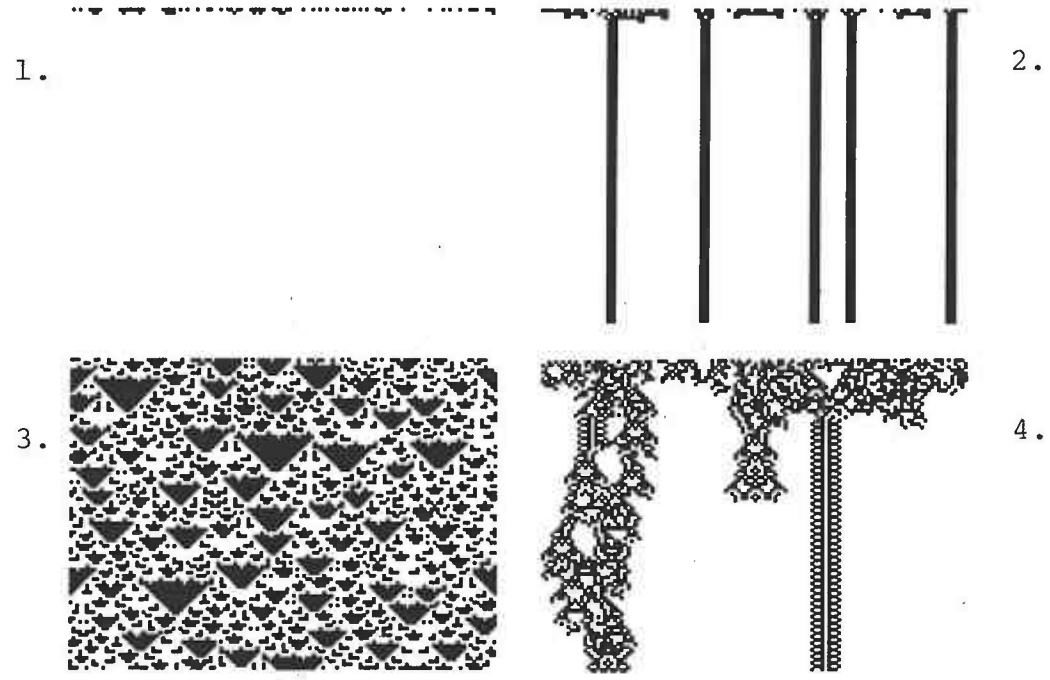


Abb.1: Die vier Grundklassen eindimensionaler Zellularräume nach WOLFRAM (1984a). Es ist je ein Beispiel einer Entwicklung aus einer Zufalls-Startkonfiguration gezeigt. (Entnommen aus: Scientific American, März 1984)

B. Die ZTKS wird mitgeprägt durch den ausgiebigen Einsatz von Computern zur Simulation zellulärer Entwicklungen. - Nicht nur, daß das Durchspielen zellulärer Entwicklungen ganz im Sinne von John von Neumann (vgl. BURKS 1966) als hypothesenerzeugendes Verfahren genützt wird, sondern die von den Computern bereitgestellte 'künstliche Realität' tritt vollwertig an die Stelle der im klassischen Experiment befragten 'natürlichen Realität'. Die Arbeiten der ZTKS bestehen regelmäßig zu einem Gutteil in der Referierung von 'Meßgrößen', wie sie sich aus vielen einzelnen 'Experimenten', d.h. Entwicklungen von Zufallskonfigurationen, ausmitteln lassen, sowie den graphischen Wiedergaben von zellulären Entwicklungen, die wegen auffallender 'Phänomene' ausgesucht oder in 'repräsentativen Stichproben' gezeigt werden (z.B. MARTIN et al. 1984; WOLFRAM 1984a). Es entsteht stellenweise der Eindruck einer jungen Experimentalwissenschaft.

C. Es werden nur wenige Teilklassen aller möglichen Zellularräume untersucht. - Fast durchgängig werden eindimensionale Systeme untersucht, und unter diesen hinwiederum zumeist "legale" mit "totalistischen" lokalen Übergangsfunktionen f_o. Dabei heißt ein "cellular automaton" legal, wenn f_o symmetrisch ist und ein Ruhezustand s_o existiert; f_o heißt totalistisch, wenn ihre Werte von den Argumenten nur als Menge, also unabhängig von deren Reihenfolge, abhängen (WOLFRAM 1984c). Die vier Wolfram'schen Klassen lassen sich mit solchen einfachen Zellularräumen erreichen.

D. Die ZTKS hat bislang noch kaum eigenständige Methoden und erst wenig originale Kategorien entwickelt. - Es wird überwiegend versucht, zelluläre Modelle mit schon bewährten Mitteln zu erfassen. Zu nennen sind vor allem folgende Werkzeuge:

- Wahrscheinlichkeitstheorie, Ergodentheorie, statistische Mechanik (z.B. WOLFRAM 1983; LIND 1984; WILBUR et al. 1986),
- Automatentheorie, formale Sprachen (z.B. WOLFRAM 1984a),
- Algebra (z.B. MARTIN et al. 1984; auch LIND 1984).

Einige originale Ansätze sind nicht so sehr in der Methodik als vielmehr in der Entdeckung deskriptiver Kategorien zu finden. Neben den schon erwähnten vier Wolfram'schen Klassen gehören hierher z.B.

- die Verbindung von "Phasengrenzen" in Konfigurationen mit der Simulation eines Zellularraumes durch einen anderen, was zu einer Art "renormalization theory" führen könnte (GRASSBERGER 1984),
- die Modellierung von Teilchen ("solitons") als endliche zeitperiodische Konfigurationen (WOLFRAM 1984c; PARK et al. 1986),
- und nicht zuletzt eben die Grundperspektive, daß "cellular automata" überhaupt als diskrete Modelle physikalischer Vorgänge oder gar als eigenständige "imaginary physics" (S. Ulam; zitiert nach VICHNIAC 1984) dienen können (VICHNIAC 1984; TOFFOLI 1984).

E. In der ZTKS wird ausnahmslos der Ausdruck "cellular automaton" verwendet für das, was ich als "Zellularraum" eingeführt habe. - Einzelne Konfigurationen und ihre Entwicklungen interessieren hier nie um ihrer selbst willen, wie ja auch in der experimentellen Physik der je einzigartige Versuchsaufbau und -ablauf nicht von Belang ist, sondern die von den einmaligen (Mikro-) Konstellationen unabhängigen Invarianten. Deswegen wird das Wort "cellular automaton" auch nicht mehr, wie seinerzeit bei von Neumann, für ausgezeichnete Konfigurationen benötigt. Daß es nun für ganze 'imaginäre Physiken' verwendet wird, ist immerhin für den unbefangenen Beobachter nicht leicht nachvollziehbar. Es ist ein, eingestandenermaßen recht äußerliches, Indiz für meine

1.4. These: Die ZTKS und der algorithmische Aspekt vertragen sich nicht miteinander

A. Die sich schon in der Benennung "cellular automata" zeigende Assoziation von Modellen imaginärer Physiken mit Rechenautomaten reicht tiefer als nur in die sprachliche Oberfläche:

> "The discrete nature of cellular automata allows a direct and powerful analogy between cellular automata and digital computers to be drawn. The initial configuration for a cellular automaton corresponds to the "program" and "initial data" for a computation. "Processing" occurs through the time evolution of a cellular automaton, and the "results" of the computation are given by the configurations obtained." (WOLFRAM 1984b, p.vii)

Effektive "computations" implizieren in irgend einer Weise Endlichkeit ihrer Beschreibung. In der ZTKS führt dies (unter anderem) dazu, daß o h n e A u s n a h m e nur Entwicklungen von einem Startzeitpunkt t = 0 an betrachtet werden - negative Zeiten, d.h. Vergangenheiten, bleiben völlig außerhalb des Blickfeldes. Darüberhinaus sind die betrachteten Konfigurationen oftmals endlich, und die Entwicklungen werden nur über einen endlichen Zeitraum hinweg verfolgt, ohne daß dies als besondere Beschränkung empfunden wird. Pointiert gesprochen: Man läßt die - imaginäre - Wirklichkeit nur durch endliche Fensterchen in den Forschungsbetrieb hereinschauen. - Die - natürliche - Realität hat aber doch vor jedem Experiment immer schon eine Vergangenheit und neben jeder mühevoll abgeschirmten Experimentalzone unbekanntes Wirken. Will man zelluläre Modelle als volle Analoga physikalischer Wirklichkeit und nicht bloß als Abbild beschränkter Experimentalsituationen, dann läge es doch nahe, von vorneherein unendliche Konfigurationen und vor allem auch unbeschränkte Vergangenheiten zu berücksichtigen.

B. In vielen Arbeiten wird für "cellular automata" die Existenz eines Ruhezustandes gefordert. Diesem kommt aber gar keine eigentliche Bedeutung zu. Regelmäßig wird er im Eingangsteil der Aufsätze postuliert, ohne dann wieder aufzutauchen. Man könnte ihn als Relikt des algorithmischen Aspekts auffassen. - Überdies zeigt eine einfache Überlegung (siehe Bemerkung 2.2.5 dieser Arbeit), daß es zu jedem Zellularraum einen gibt, der sich im wesentlichen gleich verhält und einen Ruhezustand aufweist. Das heißt aber, daß ein Ruhezustand keine wesentliche Eigenschaft eines Zellularraumes ist.

C. Zu manifesten Ungereimtheiten führt die 'algorithmische Verlockung' bei der Beschreibung der vierten Wolfram'schen Klasse. Der prominenteste Vertreter dieser Klasse ist das wohl allseits bekannte 'Spiel' "Life" von J.H. Conway. Die Berechnungsuniversalität dieses Zellularraums ist schon längere Zeit bekannt. Es scheint so, als hätte dies die weithin aufgegriffene Vermutung von WOLFRAM (1984c) motiviert, daß diese Klasse durch ihre Berechnungsuniversalität zu charakterisieren sei, genauer: dadurch, daß in ihren Zellularräumen Startkonfigurationen angebbar sind, die als universale Automaten interpretiert werden können. - Andererseits gibt es aber auch reversible Zellularräume, die berechnungsuniversal sind (MARGOLUS 1984). Dabei heißt "reversibel", daß die Entwicklungen auch bei Zeitumkehr deterministische Übergangsfunktionen aufweisen. Reversible Zellularräume liegen aber nicht in "class 4". Dies scheint schon WOLFRAM (1984a, p.43) unausgesprochen anzunehmen. Es ergibt sich aber auch aus folgendem:

> "In a class 4 cellular automaton, evolution from an initial configuration of size n_o [d.h. $c_o \equiv s_o$ außer an n_o Stellen] may yield arbitrarily large configurations, but then ultimately contract to give a size n configuration." (WOLFRAM 1984a, p.52)

Reversible Zellularräume (mit Ruhezustand) können ein solches Verhalten aber nicht zeigen. Wie man sich klarmachen kann, ist in einem reversiblen Zellularraum eine Entwicklung, die schließlich durch n beschränkte Konfigurationen liefert, periodisch; insbesondere sind jene zu jedem Zeitpunkt durch n beschränkt.
Der Widerspruch, daß berechnungsuniversale "cellular automata" einerseits der "class 4" zugeordnet werden, andererseits aber reversible universale Zellularräume existieren, die nicht in dieser Klasse liegen können, wird in den mir bekannten Arbeiten nirgends angesprochen. Eine Erklärung für sein Auftreten und Bestehenbleiben könnte sein, daß der anschaulich-graphische Charakter von (eindimensionalen) "Life"-Verwandten so verschieden von demjenigen reversibler Zellularräume ist, daß beide gar nicht miteinander in Verbindung gebracht werden.
Die ZTKS ist noch eine 'Augenwissenschaft'. Die typischen "class 4 cellular automata" fallen optisch dadurch auf, daß ausgehend von Zufallskonfigurationen Gebiete im Ruhezustand immer größer werden, und daß sich vor diesem Hintergrund dann ein 'interagierendes' (und ausdünnendes) Wirkmuster von Soliton-ähnlichen Gebilden ausprägt.
In reversiblen Zellularräumen können aber solche immer größeren 'Ruhezonen' im allgemeinen nicht entstehen, weswegen hier dem Auge die graphischen Darstellungen zumeist 'chaotisch', d.h. "class 3" zugehörig, erscheinen dürften. - Hier erscheint mir die Meinung vertretbar,

daß die 'algorithmische Tradition' durch ihre Verlockung zur Gleichsetzung von "class 4" mit Berechnungsuniversalität mehr persistente Unklarheiten als Einsichten geschaffen hat. Die "class 4" ist in mancher Hinsicht die interessanteste, die nichttrivialste. Sie wird gemeinhin mit einer ihrer genaueren Definition noch harrenden Fähigkeit zur "self organization" in Verbindung gebracht, welche auch der natürlichen Wirklichkeit zuzusprechen sei. Ihr besseres Verständnis ist darum ein zentrales Anliegen der ZTKS, und Unklarheiten in diesem Punkt besonders schmerzhaft. - Die Verbindung einer nicht genau zu präzisierenden Nichttrivialität mit Berechnungsuniversalität läßt sich übrigens bis auf John von Neumanns "29 state cellular system" zurückverfolgen.

D. Mit der vierten Wolfram'schen Klasse hängt auch ein weiterer Punkt zusammen, wo die Analogiebildung zwischen Algorithmus und Realität den Gang der Forschung zum Hinken bringt. Ich meine die Anfälligkeit von Computerprogrammen für kleinste Störungen und Fehler. Dies führt in der ZTKS dazu, daß als ein Charakteristikum eben der "class 4" ein unregelmäßiges, unvorhersehbares Reagieren auf kleine Veränderungen der Startkonfiguration angesehen wird (WOLFRAM 1984a). Diese Suszeptibilität führt oft schon nach wenigen Zeitschritten zu qualitativ völlig voneinander abweichenden Erscheinungen (WOLFRAM 1984c). Insbesondere sind auch "soliton-like structures" sehr instabil. Sie benötigen einen völlig ruhenden Hintergrund, um zu 'überleben'; allenfalls lassen sie sich an sehr speziellen anderen Mustern 'reflektieren'. Systeme, die zu einer wie auch immer gearteten Selbstorganisation befähigt sind, sollten aber die Evolution relativ unempfindlicher Subsysteme begünstigen. Es ist nicht ersichtlich, ob oder wie dies mit "class 4 cellular automata" erreicht werden kann. Die Empfindlichkeit für kleine Änderungen wird übrigens bei konkreteren Anwendungen zellulärer Modelle, vor allem in der Biologie, als störend und unrealistisch empfunden (vgl. z.B. BOULIGAND 1985; PACKARD 1985). - Ich will in diesen Zusammenhang auch die Bemerkung einflechten, daß sich bewegende Solitonen in der ZTKS bislang nur konstanter, und zwar entweder 'relativistisch' schneller oder gar keiner Geschwindigkeit bedienen können. Natürliche Teilchen aber sind mehr oder weniger stabil bei Beschleunigung und bewegen sich gegenüber der Lichtgeschwindigkeit oft sehr langsam. So sehr die "persistent structures" in "class 4 automata" auch ins Auge springen, so scheinen sie mir doch einige fundamentale Unterschiede zu natürlichen Teilchen aufzuweisen.

1.5. Gründe für die Untersuchung edenfreier Zellularräume

Das Interesse an Garten-Eden-Problemen scheint heute erloschen zu sein. Das mag daran liegen, daß die in Abschnitt 1.2 geschilderte Verwirrung einen wenig verlockenden Nachgeschmack hinterlassen hat, oder daran, daß die ursprüngliche Motivation von Moore zusammen mit dem Interesse an sich selbst reproduzierenden Automaten verlorengegangen ist. In der ZTKS fand ich edenfreie Zellularräume nur einmal explizit berücksichtigt, und zwar bei WOLFRAM (1984a), wo sie als lästiges Übel mitgeschleppt werden, das sich den dortigen Klassifikationsversuchen nicht befriedigend eingliedern läßt. Warum also jetzt wieder eine Arbeit zu jenem Thema? Ich möchte einige Argumente aufzählen.

A. Das klassische Durcheinander um Garten-Eden-Konfigurationen läßt sich vermeiden, wenn man keinen Ruhezustand berücksichtigt und sich gleich auf globale Konfigurationen bezieht. Daß dies ohnehin sinnvoll sein könnte, klang oben schon mehrfach an.

B. Gegen die mit edenfreien Zellularräumen verknüpfte Zulassung unendlicher Vergangenheiten lassen sich zwei auf den ersten Blick sehr verschiedenartige Argumente anführen.

1) Unsere reale Welt, deren Grundprinzipien wir modellieren wollen, ist nach herrschender Meinung einem Urknall entsprungen. Für ihr Alter werden sogar Schätzungen angegeben.
2) Ein Hauptanliegen der ZTKS ist eine Präzisierung des Begriffs der Selbstorganisation. Diese ist aber intuitiv doch wohl stets ein Sichentwickeln immer raumgreifenderer und vielleicht auch immer stabilerer 'Subsysteme', 'Gestalten'. In die Vergangenheit gewendet, entspricht dieser intuitiven Vorstellung eine immerfort zunehmende Auflösung und Lokalisierung von Gestalten. In diskreten Systemen stößt eine solche Auflösung aber irgendwann an die Grenze des zugrundeliegenden Rasters.

Diese beiden Argumente ließen sich vom impliziten Standpunkt der heutigen ZTKS vorbringen und sich mit einem eigenen Weltmodell vereinbaren, demzufolge nach einem 'Urknall zum Zeitpunkt t = 0', d.h. einer Zufalls-Startkonfiguration, eine Entwicklung mit Selbstorganisation, d.h. vom Typ "class 4", einsetzt.

Jener Standpunkt scheint mir aber zwei nicht leicht lösbare Probleme aufzuwerfen.

a) Erstens handelt man sich ein 'Startproblem' ein. Man muß das Erste des Urknalls beschreiben, was die Physiker aber gemeinhin als nicht mehr zur Physik gehörig betrachten. Es kommen in jedem Fall schwer zu rechtfertigende apriori-Kategorien ins Spiel.

b) Zweitens, so vermute ich, fällt man beim Start von t = O aus zwangsläufig dem Phänomen der Instabiltät der Solitonen zum Opfer. Denn, so würde ich etwas hilflos intuitiv argumentieren, man bewegt sich hier vor dem Hintergrund des Algorithmischen: Startkonfigurationen sind S e t z u n g e n; sie 'werden gegeben' wie alle konstruiblen Objekte. Sie enthalten stets nur eine endliche Information, ob sie nun Zufallskonfigurationen sind (dann enthalten sie gar keine verwertbare Information im Sinne etwa von BENNET (1982)) oder ausgeklügelte Automatenabbilder. Reale Teilchen entspringen aber n i e einer Zufallskonfiguration, einem 'totalen Rauschen', oder einer endlichen Konfiguration: weil es immer schon eine teilweise organisierte Vergangenheit gibt und weil die Nachbarschaft jeden endlichen Ausschnitts stets voller wirksam werdender Unbekannte ist. Das reale Universum, sofern in ihm Physik betrieben werden kann (d.h. später als zum Zeitpunkt Null), hat immer schon eine Evolution hinter sich, hat schon, wie weiter unten präzisiert wird, unendlich viel Information geschaffen. Es hat sich immer schon irgendwie entspannt, geordnet, stabilisiert. Teilchen sind stabil, 'w e i l' sie immer schon in vergleichsweise stabilisierte Zusammenhänge eingebettet sind. 'Die Teile aus dem Ganzen, das Ganze aus den Teilen' - nach diesem hermeneutischen Grundprinzip kann man auch umgekehrt sagen: übergreifende Zusammenhänge bilden sich aus, 'w e i l' evolutionäre Abläufe schon vergleichsweise stabile Subsysteme (Teilchen, 'Dinge') bereitgestellt haben. Sieht man die Welt intuitiv auf diese Weise, erscheint die spontane und allgemeine Genese nichttrivialer stabiler Systeme aus dem Chaos oder einer endlichen Setzung undenkbar.

Bevor ich nun den Gedanken schildere, der meinem intuitiven Stammeln eine gewisse Fundierung und Präzisierung verleiht, möchte ich noch kurz auf einen scheinbaren anderen Ausweg aus dem Dilemma zwischen 1),2) und a),b) eingehen. Die in 2) angesprochene zunehmende Auflösung stößt nämlich offenbar dann nicht an Rastergrenzen, wenn man statt diskreter kontinuierliche Systeme zugrundelegt. Durchdenkt man diesen Ausweg aber genauer, so wird man feststellen, daß man vom Regen in die Traufe geraten ist. Das Problem des negativen Unendlichen findet sich hier wieder im unendlichen Regreß der Beschreibungsebenen. Jede Beschreibungsebene wird echt präzisiert durch eine feinere; man findet keinen Halt, um ein deterministisches Entwicklungsgesetz zu formulieren! Die durch die beliebig feine Beschreibbarkeit bedingten Freiheitsgrade entziehen der Determination gleichsam ihren begrifflichen Boden. Man ist hier, so glaube ich, im Herz des Problems der Selbstorganisation angelangt.

Ich möchte nun den versprochenen Ansatz vorstellen, auf dem man meiner Meinung nach zwischen 1),2) und a),b) hindurchschiffen kann. Der Grundgedanke ist einfach der, die physikalische Zeit T unserer Welt nichtlinear auf die Generationsfolgezeit t zellulärer Modelle abzubilden, so daß T das Intervall $(0, \infty)$ und t das Intervall $(-\infty, \infty)$ durchläuft. Eine naheliegende Beziehung, die dies liefert, wäre z.B. $t = \ln T$. - Was bedeutet ein solches Vorgehen aber für die inhaltliche Deutung von t?

Nun, t-Zeitintervalle einer bestimmten Länge entsprächen dann umso kürzeren T-Zeitabschnitten, je früher beide liegen. Frühere 'Realzeit' T bedeutet aber nach heutigen Vorstellungen höhere (durchschnittliche) Temperatur des Universums. Je höhere Temperatur, umso raschere Bewegung desto 'elementarerer' Teilchen, umso mehr Kollisionen und Umwandlungen pro T-Abschnitt, - kurz, umso höhere Dichte Ereignisse/ T zumindest im mikroskopischen Bereich. Es liegt demnach nahe, die Zellularzeit t als Ereignismaß, als 'Zeit phänomenaler Beschreibung' zu deuten. Das harmoniert mit den Einschränkungen eines diskreten Modells. Wir können dort nur bis zu einer gewissen unteren Grenze Information/ t codieren. Geschieht aber mehr, was wir codieren müßten, so 'nehmen wir uns eben mehr Zeit' - etwa durch die Interpretation $t = \ln T$.

Ich hoffe, daß man mit diesem oder ähnlichen Ansätzen auch bei der Klärung der bekannten Antinomien bei der Definition einer ausgezeichneten Zeitrichtung durch den zweiten thermodynamischen Hauptsatz weiterkommen kann. Hierauf und auf ähnliches mehr kann ich aber in diesem Rahmen nicht weiter eingehen. - Man verzeihe mir, daß ich den Boden der Mathematik eben verlassen habe. Aber diese physikalisch-erkenntnistheoretischen Aspekte sind eine der beiden persönlichen Hauptmotivationen für diese Arbeit und sollten deswegen vielleicht doch nicht unerwähnt bleiben, auch wenn die Untersuchung edenfreier Zellularräume wohl kürzer zu rechtfertigen wäre.

C. Man kann, wenn man unbedingt will, in der Klasse der edenfreien Zellularräume Analoga der vier Wolfram'schen Klassen aufspüren. Ohne Schwierigkeiten erhält man Beispiele, die wie Vertreter der Klassen zwei und drei aussehen. Klasse eins wäre durch triviale Zellularräume mit $|S| = 1$ vertreten; Klasse vier durch berechnungsuniversale reversible. Es gibt also jedenfalls 'qualitativ verschiedene' edenfreie Zellularräume, so daß ihre eingehendere Untersuchung nicht von vorneherein zum Marsch in die Trivialität verdammt ist. Es gibt sogar Exemplare, die sich nicht auf den ersten Blick in die Wolfram'schen Klassen einordnen lassen. Als Zeuge mag hier Abbildung 2 dienen.

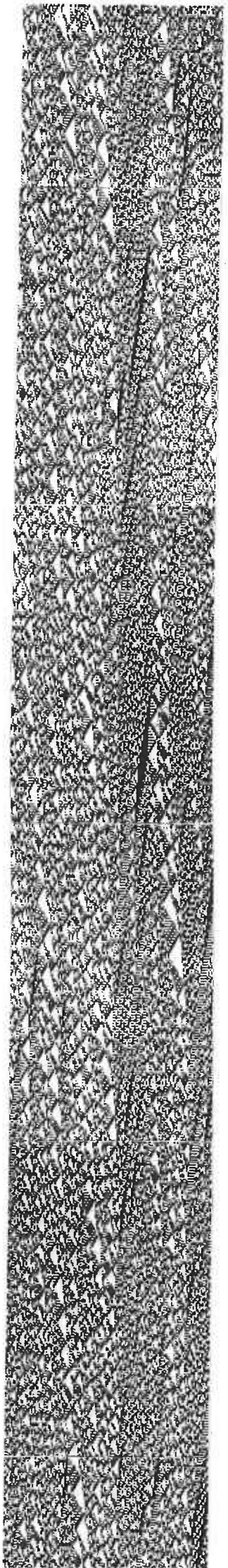


Abb.2: Entwicklung eines edenfreien Zellularraumes aus einer Zufallskonfiguration. Die Zeit verläuft von oben nach unten. Die Ausdehnung des gezeigten Ausschnittes der Konfigurationen beträgt 130 Zellen; die dargestellte Entwicklungsdauer umfaßt etwa 1050 Generationen. Die zugrundegelegte lokale Übergangsfunktion ist (zur Terminologie siehe Abschnitt 2.3):

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 3 & 3 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 3 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

D. Wie sich in dieser Arbeit noch zeigen wird, ist Edenfreiheit eine sehr starke Eigenschaft, die bedeutende Regelmäßigkeiten der lokalen Übergangsfunktion f_o impliziert. Allein schon vom rein-mathematischen, spielerisch-ästhetischen Standpunkt aus bewertet, sind solche Zellularräume überraschend 'schöne' und darüber hinaus hinreichend 'gutartige' Objekte, - ohne trivial zu sein!

1.6. Zusammenfassung der folgenden Abschnitte

Die wichtigsten Ergebnisse des Weiteren wären etwa wie folgt zu notieren. Im Abschnitt 2 wird das Problem edenfreier Zellularräume auf 2-stellige Umgebungsfunktionen u reduziert und in eine Matrixdarstellung gebracht. In Abschnitt 3 zeigt sich, daß Edenfreiheit äquivalent ist damit, daß in einer gewissen multiplikativen Matrizenhalbgruppe die Nullmatrix nicht enthalten ist. Hierfür werden effektive Kriterien gegeben. Im 4. Abschnitt wird aus der Form spezieller Elemente jener Halbgruppe Information über die Gestalt von f_o gewonnen. Der Fall, wo $|S|$ eine Primzahl ist, wird vollständig aufgeklärt. Es wird eine hinreichende Bedingung für Edenfreiheit gegeben, die die Konstruktion einer Vielzahl von Beispielen gestattet.

Etwas ausführlichere Überblicke finden sich jeweils am Beginn der folgenden Abschnitte.

2. Vorbereitungen

Übersicht über Abschnitt 2. Nach einer erneuten, gegenüber Abschnitt 1 vereinfachten Definition der Grundbegriffe (2.1) wird eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der eindimensionalen Zellularräume eingeführt. Edenfreiheit ist eine Klasseneigenschaft bezüglich der dadurch gegebenen Äquivalenzklassen. Das ermöglicht es, die Untersuchung edenfreier Zellularräume auf die Betrachtung besonders einfacher Vertreter zu reduzieren (2.2). Für diese einfachen Vertreter bietet sich eine Matrizendarstellung an (2.3), was in den späteren Abschnitten zur Grundlage der Hauptaussagen werden wird.

2.1. Grundlegende Begriffsbestimmungen

Gegenüber den allgemeineren Basisdefinitionen im ersten Abschnitt soll hinfort das Grundgitter der betrachteten Zellularräume stets $G = \mathbb{Z}$ sein; als Nachbarschaften wählen wir die Intervalle konstanter Länge r ($r \geq 2$). Mit dieses stillschweigenden Konventionen formulieren wir

Definition 2.1.1. Ein Zellularraum (hinfort abgekürzt ZR) ist eine Struktur (S, f_o), worin

S die k-elementige Menge $\{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ und
$f_o: S^r \to S$ die r-stellige lokale Übergangsfunktion

ist.

Die Zeichen r und k werden hinfort ausschließlich im eben ausgesprochenen Sinn verwendet.

Definition 2.1.2. Sei (S, f_o) ZR. Sei

$$S^* := \{s_{i_1} s_{i_2} \ldots s_{i_n} \mid n \in \mathbb{N},\ s_{i_j} \in S\}$$

die Menge der S-Wörter. Für ein S-Wort $s_{i_1} s_{i_2} \ldots s_{i_n}$ schreiben wir auch kürzer $\overset{n}{s}$ oder sogar $\bar{s}$, wenn wir

keinen Bezug auf seine Länge $\left|\overline{s}^{n}\right| := n$ nehmen wollen.
Sei $f: S^* \to S^*$ gegeben durch

$$f(\overline{s}^{n}) = \begin{cases} \emptyset \text{ (das leere Wort), falls } n < r \\ f_o((s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_r}))\ f_o((s_{i_2}, \ldots, s_{i_{r+1}}))\ldots \\ \ldots f_o((s_{i_{n-r+1}}, \ldots, s_{i_n})), \text{ sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion f heißt endliche Übergangsfunktion.
Ein S-Wort $\overline{s}_{-1}$ heißt Vorgänger von $\overline{s}_o \in S^*$, falls $f(\overline{s}_{-1}) = \overline{s}_o$.
Sei $\tilde{C}$ die Menge aller Abbildungen $\tilde{c}: \mathbb{Z} \to S$.
Dann definiert

$$\tilde{c}_1 \sim \tilde{c}_2 \quad :\text{gdw} \quad \exists x_o \in \mathbb{Z}\ \forall z \in \mathbb{Z}: \ \tilde{c}_1(z) = \tilde{c}_2(z+x_o)$$

eine Äquivalenzrelation auf $\tilde{C}$. Wir nennen die Äquivalenzklassen Konfigurationen. C sei die Menge der Konfigurationen:

$$C := \tilde{C}/_{\sim}$$

Einzelne Konfigurationen bezeichnen wir mit dem evtl. indizierten Kleinbuchstaben c.
Wir definieren die globale Übergangsfunktion $F: C \to C$ durch

$$F(c) = c' \quad \text{gdw} \quad \exists \tilde{c} \in c,\ \tilde{c}' \in c'\ \forall z \in \mathbb{Z}: \\ f_o((\tilde{c}(1+z), \tilde{c}(2+z), \ldots, \tilde{c}(r+z))) = \tilde{c}'(z).$$

Eine Konfiguration c_{-1} heißt Vorgänger von einer Konfiguration c_o, falls $F(c_{-1}) = c_o$. Hat eine Konfiguration keinen Vorgänger, so heißt sie Edenkonfiguration. Hat jede Konfiguration einen Vorgänger, so heißt der ZR (S, f_o) edenfrei. Dafür schreiben wir auch kurz $ef(S, f_o)$.

Für diese globale Definition von Edenfreiheit gibt es eine äquivalente endliche Fassung. Das ist der Inhalt von

Satz 2.1.3. Äquivalent sind:

1) ef (S,f_0)

2) $\forall \bar{s}_0 \in S^* \exists \bar{s}_{-1} \in S^*: f(\bar{s}_{-1}) = \bar{s}_0$

Beweis: "1) $\Rightarrow$ 2)" ist klar. Ein Beweis der Umkehrung findet sich in WACHSMUTH (1974, Theorem 8.2). □

WACHSMUTH (1974) verwendet in seinem Beweis des eben angegebenen Satzes das Lemma von König, das besagt, daß in einem unendlichen Baum, der nur endliche Verzweigungen enthält, ein unendlicher Pfad existiert. Eine wesentlich stärkere Behauptung als Satz 2.1.3. beweist GROSKY (1978) mit dem Endlichkeitssatz der Prädikatenlogik. Er zeigt, daß ein Zellularraum überhaupt keine Edenkonfiguration hat, wenn er nur keine Edenkonfiguration mit einer aus einer gewissen Klasse beliebig vorgegebenen Eigenschaft besitzt. Diese Eigenschaftsklasse, die "finitely arbitrary properties", umfaßt z.B. Endlichkeit, Co-Endlichkeit und die Eigenschaft, eine vorgegebene endliche Teilkonfiguration zu enthalten.

2.2. Eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der Zellularräume

Wir beschreiben eine Äquivalenzrelation, die anschaulich gesprochen besagt, daß die Entwicklungen zweier äquivalenter Zellularräume sich sich bei geeigneter jeweiliger 'Zusammenfassung der Gitterelemente zu größeren Komplexen' wechselseitig entsprechen.

Definition 2.2.1. Sei $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$. Sei $S^{(*a)} \subset S^*$ durch

$$S^{(*a)} := \left\{ \bar{s} \in S^* \mid |\bar{s}| = a \cdot n,\ n \in \mathbb{N} \right\} .$$

Wir können S-Wörter aus $S^{(*a)}$ zu S^a-Wörtern 'kontrahieren', indem wir sie in Abschnitte der Länge a einteilen und diese Abschnitte dann als Elemente von S^a auffassen. Wir nennen diese Kontraktionsabbildung χ:

$$\chi : S^{(*a)} \to (S^a)^* .$$

χ ist offenbar bijektiv. Sei

$$f^b : S^* \to S^*$$

die b-fache Hintereinanderausführung von f.

Falls $f(\overset{n}{s}) \neq \emptyset$, ist offenbar

$$|f(\overset{n}{s})| = n - r + 1.$$

Daraus folgt für $f^b(\overset{n}{s}) \neq \emptyset$:

$$|f^b(\overset{n}{s})| = n - b(r - 1).$$

Daraus ergibt sich weiter

$$f^b(\overset{a\cdot n}{s}) \in S^{(*a)} \quad \text{gdw} \quad a \mid b(r - 1) \text{ oder } a \cdot n - b(r-1) \leq 0$$

d.h. für Paare (a,b) mit $a \mid b(r - 1)$ ist auf natürliche Weise die Abbildung

$$f^b \restriction S^{(*a)} : S^{(*a)} \to S^*$$

umzudeuten zu einer Abbildung

$$f_b : (S^a)^* \to (S^a)^* ,$$

indem wir setzen:

$$f_b := \chi \circ f^b \circ \chi^{-1} .$$

Definition 2.2.2. Wir nennen zwei Zellularräume (S,f_o) und (S',f'_o), wo f_o r-stellig und f'_o r'-stellig sind, gleichwertig, geschrieben

$$(S,f_o) \leftrightarrow (S',f'_o),$$

:gdw ex. a,b,a',b' mit

1) $a \mid b(r-1)$, $a' \mid b'(r'-1)$

2) ex. Isomorphismus π :
$\pi : ((S^a)^*, f_b) \simeq ((S'^{a'})^*, f'_{a'})$,
der längentreu ist, d.h. für $\overset{n}{s} \in (S^a)^*$ ist
$|\pi(\overset{n}{s})| = |\overset{n}{s}| = n$.

Wir schreiben dann:

$(a,b,a',b') : (S,f_o) \leftrightarrow (S',f'_o)$.

Zur Veranschaulichung: Zwei Zellularräume ZR, ZR' sind gleichwertig, wenn sich in ihren Entwicklungen b bzw. b' Zeitschritte voneinander entfernte Generationen so in a bzw. a' lange Abschnitte unterteilen lassen, daß sich diese paarweise in Entsprechung bringen lassen (vgl. Abbildung 3).

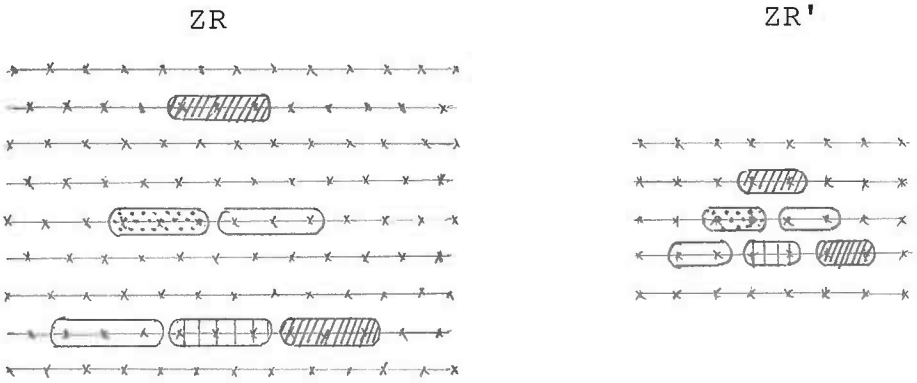


Abb.3: Ausschnitte aus Entwicklungen zweier gleichwertiger Zellularräume ZR und ZR'. Die Zeit läuft von unten nach oben. In diesem Beispiel ist (a,b,a',b') = (3,3,2,1).

Lemma 2.2.3. $\leftrightarrow$ ist Äquivalenzrelation.

Beweis(Skizze): Nicht ganz trivial ist höchstens die Transitivität. Sei $(a,b,a',b') : (S,f_o) \leftrightarrow (S',f'_o)$. Dann macht man sich anschaulich leicht klar, daß

a) $\forall m \geq 1$: $(ma,mb,ma',mb') : (S,f_o) \leftrightarrow (S',f_o')$

b) $\forall n \geq 1$: $(a,nb,a',nb') : (S,f_o) \leftrightarrow (S',f_o')$.

Sei nun

$(a_1,b_1,a_2,b_2) : (S_1,f_{o1}) \leftrightarrow (S_2,f_{o2})$ und

$(a_2',b_2',a_3,b_3) : (S_2,f_{o2}) \leftrightarrow (S_3,f_{o3})$.

Durch Anwendung von a) erhalten wir

$(\tilde{a}_1,\tilde{b}_1,d,\tilde{b}_2) : (S_1,f_{o1}) \leftrightarrow (S_2,f_{o2})$ und

$(d,\tilde{b}_2',\tilde{a}_3,\tilde{b}_3) : (S_2,f_{o2}) \leftrightarrow (S_3,f_{o3})$,

und daraus durch Anwendung von b)

$(\tilde{a}_1,\tilde{\tilde{b}}_1,d,e) : (S_1,f_{o1}) \leftrightarrow (S_2,f_{o2})$ und

$(d,e,\tilde{a}_3,\tilde{\tilde{b}}_3) : (S_2,f_{o2}) \leftrightarrow (S_3,f_{o3})$.

Daraus ergibt sich aber sogleich

$(\tilde{a}_1,\tilde{\tilde{b}}_1,\tilde{a}_3,\tilde{\tilde{b}}_3) : (S_1,f_{o1}) \leftrightarrow (S_3,f_{o3})$. □

Eine ähnliche Äquivalenzrelation geben YAMADA und AMOROSO (1971). Jene ist spezieller, insofern dort stets $b = 1$, und allgemeiner, insofern dort beliebige Dimensionen des Gitters und beliebige Nachbarschaftsfunktionen berücksichtigt werden. Faßt man zelluläre Modelle als Algorithmen auf, liegt eine andersgeartete Bestimmung von 'gleichwertig' nahe. Zwei Zellularräume wären dann äquivalent, wenn es eine berechenbare, mit f_o verträgliche Bijektion $C_e \rightarrow C_e$ gibt (z.B. VOLLMAR 1979, p. 26).

Zum Ausgangspunkt späterer Überlegungen wird die Tatsache, daß in jeder Äquivalenzklasse Vertreter mit der kleinstmöglichen Nachbarschaftsgröße $r = 2$ liegen:

Lemma 2.2.4. Zu jedem ZR (S,f_o) läßt sich effektiv ein gleichwertiger ZR (S',f_o') mit 2-stelligem f_o' finden.

Beweis: Sei f_o r-stellig. Wir wählen a,b mit $a = b(r-1)$. Wir setzen $S' := S^a$ und $f'_o := f_b \restriction (S^a)^2$. Dann ist f'_o 2-stellig und

$$(a,b,1,1) : (S,f_o) \leftrightarrow (S',f'_o).$$ □

Im ersten Abschnitt versuchte ich herauszuarbeiten, daß in der Geschichte zellulärer Modelle durch $f_o(s_o,\ldots,s_o)=s_o$ gekennzeichnete Ruhezustände eine nicht unwichtige Rolle gespielt haben. Betrachtet man nun, was naheliegt, gleichwertige Zellularräume als 'im Sinne der ZTKS im wesentlichen gleich', so zeigt sich nun, daß der Besitz eines Ruhezustandes keine wesentliche Eigenschaft eines Zellularraumes ist:

Bemerkung 2.2.5. Zu jedem ZR (S,f_o) läßt sich effektiv ein gleichwertiger ZR (S',f'_o) mit $r = r'$ und einem Ruhezustand finden.

Beweis: Sei $s_m \in S$. Wir betrachten die Konfiguration c, die durch

$$(*) \quad \forall \tilde{c} \in c \; \forall z \in \mathbb{Z}: \; \tilde{c}(z) = s_m$$

bestimmt ist. Für $(*)$ schreiben wir auch kürzer $c \equiv s_m$. Es gilt

$$c \equiv s_m \Rightarrow \exists s_n \in S : F(c) \equiv s_n;$$

d.h. F induziert eine Abbildung $g: S \to S$ durch

$$g(s_m) = s_n \text{ :gdw } (c \equiv s_m \Rightarrow F(c) \equiv s_n).$$

Eine Abbildung einer endlichen Menge in sich enthält aber Zykel, d.h. für ein gewisses $s_{i_o} \in S$ und passendes b ist $g^b(s_{i_o}) = s_{i_o}$. Wir setzen nun $S' := S^b$ und $f'_o := f_b \restriction (S^b)^r$. Dann ist

$$(b,b,1,1) : (S,f_o) \leftrightarrow (S',f'_o),$$

und $(\underbrace{s_{i_o},\ldots,s_{i_o}}_{b \text{ mal}})$ ist Ruhezustand in (S',f'_o).

□

Unsere Äquivalenzrelation soll helfen, edenfreie Zellularräume zu beschreiben, indem wir die einfachen Vertreter mir r = 2 untersuchen. Dazu müssen wir noch nachweisen, daß Edenfreiheit eine Klasseneigenschaft ist:

Lemma 2.2.5. Sind (S,f_o) und (S',f'_o) gleichwertig, so gilt: $ef(S,f_o)$ gdw $ef(S',f'_o)$.

Beweis: Sei $(a,b,a',b'): (S,f_o) \leftrightarrow (S',f'_o)$.
Sei $\overset{n}{s} \in S^*$ ein S-Wort ohne Vorgänger, d.h. es existiert kein $\overset{n+r-1}{s} \in S^*$ mit $f(\overset{n+r-1}{s}) = \overset{n}{s}$.
Es reicht zu zeigen: es existiert ein $\overset{m}{s}' \in S'^*$ ohne $f'^{b'}$-Urbild.
OBdA $a \mid n$ (sonst verlängern wir $\overset{n}{s}$ in beliebiger Weise auf $\overset{n'}{s}$ mit $a \mid n'$; dann ist auch $\overset{n'}{s}$ ohne Vorgänger).
Seien $\varkappa: S^{(*a)} \to (S^a)^*$, $\varkappa': S'^{(*a')} \to (S'^{a'})^*$ und $\pi: ((S^a)^*,f_b) \simeq ((S'^{a'})^*,f'_{b'})$ wie in Def.2.2.1 und Def.2.2.2.
Annahme: $\varkappa'^{-1} \circ \pi \circ \varkappa(\overset{n}{s})$ hat ein $f'^{b'}$-Urbild, d.h.

$$\text{ex. } \overset{m'}{s} \in S'^{(*a')} : \quad f'^{b'}(\overset{m'}{s}) = \varkappa'^{-1} \circ \pi \circ \varkappa(\overset{n}{s})$$

$$\Rightarrow \text{ex. } {}^{m'}\!/_{s}{}^{a'} \in (S'^{a'})^* : \quad f'_{b'}({}^{m'}\!/_{s}{}^{a'}) = \pi \circ \varkappa(\overset{n}{s})$$

$$\Rightarrow \text{ex. } {}^{n}\!/_{s}{}^{a} \in (S^a)^* : \quad f_b({}^{n}\!/_{s}{}^{a}) = \varkappa(\overset{n}{s})$$

$$\Rightarrow \text{ex. } {}^{n}\!/_{s}{}^{a} (S^a) : \quad f^b(\varkappa^{-1}({}^{n}\!/_{s}{}^{a})) = (\overset{n}{s})$$

$\Rightarrow \overset{n}{s}$ hat f^b- und damit f-Vorgänger.

Widerspruch. □

2.3. Eine Matrixdarstellung für Zellularräume mit r = 2

Definition 2.3.1. Sei X eine Matrix. Dann bezeichne $m_{ij}(X)$ das Element in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte von X.

Ist $r = 2$, d.h. $f_o: S^2 \to S$, $S = \{s_1,\ldots,s_k\}$, so können wir f_o als quadratische Matrix M

$$M := (f_o(s_i,s_j))$$

schreiben. Sei für $x \in \{1,2,\ldots,k\}$ M_x die $k \times k$ - Matrix, die definiert ist durch

$$m_{ij}(M_x) = \begin{cases} 1, \text{ falls } m_{ij}(M) = s_x \\ 0, \text{ sonst.} \end{cases}$$

Dann enthält das k-Tupel $(M_1,M_2,\ldots,M_k)$ dieselbe Information wie M oder wie (S,f_o).
Es ist

$$\sum_{x=1}^{k} M_x = (1),$$

wobei (1) die Matrix bezeichne, deren Einträge alle gleich 1 sind. Zur Veranschaulichung ein Beispiel (wir schreiben in M statt s_i einfacher nur den Index i an):

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (M_1,M_2) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Definition 2.3.2. Sind $M_1,M_2,\ldots,M_k$ $\{0,1\}$ - Matrizen der Größe $k \times k$, welche $M_1 + M_2 + \ldots + M_k = (1)$ erfüllen, so fassen wir das k-Tupel $(M_1,\ldots,M_k)$ entsprechend den zuvor gemachten Bemerkungen als Zellularraum mit $r = 2$ auf, und umgekehrt. Ist die Voraussetzung $r = 2$ klar, werden wir die Bezeichnungen (S,f_o), M und $(M_1,\ldots,M_k)$ völlig austauschbar behandeln, also auch z.B. "ef M" schreiben usf. Wir nennen M auch die Übergangsmatrix und M_x die charakteristische Matrix von s_x $(x = 1,\ldots,k)$.

3. Balanciertheitsaussagen für edenfreie Zellularräume

Übersicht über Abschnitt 3. Zunächst wird auf leider recht mühsame Weise in Verallgemeinerung eines schon bekannten Satzes gezeigt, daß in edenfreien Zellularräumen alle S-Wörter gleichviele Vorgänger haben (3.1). Den Zellularräumen mit $r = 2$ werden Matrizenhalbgruppen zugeordnet. Die Halbgruppen edenfreier Zellularräume haben dabei besonders einfache Gestalt: alle ihre Elemente sind Matrizen mit genau k Einsen (3.2). Die Halbgruppenelemente nicht edenfreier Zellularräume dagegen sehen zumeist ganz anders aus. Dieser Hiatus führt zu Aussagen über Substrukturen von Zellularräumen und die globale Übergangsfunktion F (3.3).

3.1. Eine Verallgemeinerung eines Satzes von Bruckner

Sei für diesen Abschnitt wie gehabt (S,f_o) ein ZR mit $|S| = k$ und r-stelligem f_o.

AMOROSO und PATT (1972) geben ein Entscheidungsverfahren für die Edenfreiheit eindimensionaler Zellularräume an. Das Grundprinzip dieses Algorithmus' wird von BRUCKNER (1978/79) dazu benutzt, folgenden Satz herzuleiten, den wir in unserer Sprechweise wiedergeben:

Satz 3.1.1. ef $(S,f_o) \Rightarrow f_o$ ist balanciert, d.h.

$$\forall s_i, s_j \in S:$$
$$\left|\{(s_{i_1},\ldots,s_{i_r}) \in S^r \mid f_o((s_{i_1},\ldots,s_{i_r})) = s_i\}\right|$$
$$= \left|\{(s_{i_1},\ldots,s_{i_r}) \in S^r \mid f_o((s_{i_1},\ldots,s_{i_r})) = s_j\}\right| . \quad \square$$

Wir werden den Beweis von Bruckner etwas ausbauen, um für $r = 2$ herzuleiten:

Satz 3.1.2. Für r = 2 gilt: $ef(S,f_o) \Rightarrow$ f ist balanciert, d.h. $\forall \overset{m}{s},\overset{m'}{s} \in S^*$:

$$\left|\left\{\overset{n}{s} \in S^* \mid f(\overset{n}{s}) = \overset{m}{s}\right\}\right| = \left|\left\{\overset{n}{s} \in S^* \mid f(\overset{n}{s}) = \overset{m'}{s}\right\}\right|.$$

Zum Beweis bedarf es einiger Vorbereitungen. Wir verallgemeinern zunächst den Begriff eines Zellularraumes so, daß auch partiell definierte lokale Übergangsfunktionen erfaßt werden.

Definition 3.1.3. Sei $T = \{t_1,\ldots,t_k\}$ und $g_o: T^2 \to T$ eine partiell definierte Funktion. Sei die p-Übergangsmatrix N definiert durch

$$m_{ij}(N) := \begin{cases} 0, \text{ falls } g_o((t_i,t_j)) \text{ nicht definiert} \\ g_o((t_i,t_j)), \text{ sonst} \end{cases}$$

Ein T-Wort $\overline{t} = t_{i_1}\ldots t_{i_u}$ heißt zulässig :gdw

$$m_{i_v,i_{v+1}}(N) \neq 0 \text{ für } v = 1,\ldots,u-1, \text{ oder } |\overline{t}| \in \{0,1\}.$$

Sei T_z^* die Menge der zulässigen T-Wörter. Dann wird eine Abbildung $g: T_z^* \to T^*$ definiert durch $g(\emptyset) := \emptyset$ und

$$g(t_{i_1}\ldots t_{i_u}) := \begin{cases} \emptyset, \text{ falls } u = 1 \\ g_o((t_{i_1},t_{i_2}))\ldots g_o((t_{i_{u-1}},t_{i_u})), \text{ sonst.} \end{cases}$$

(T,g_o) heißt partiell definierter Zellularraum, abgekürzt p-ZR, falls

(*) $\forall m \geq 2\ \forall \overset{m}{t} \in T_z^* : g_o(\overset{m}{t}) \in T_z^*$.

g_o heißt balanciert, falls $\forall t_i,t_j \in T$:

$$\left|\{(t,t') \in T^2 \mid g_o((t,t')) = t_i\}\right| = \left|\{(t,t') \in T^2 \mid g_o((t,t')) = t_j\}\right|.$$

Schließlich heiße ein p-ZR (T,g_o) edenfrei, falls

$$\forall \overline{t} \in T_z^*\ \exists \overline{t}' \in T_z^* : g(\overline{t}') = \overline{t}.$$

Wie man leicht überlegt, ist (*) gleichwertig mit

$$\forall \overset{3}{t} \in T_z^* : g_o(\overset{3}{t}) \in T_z^*.$$

Insbesondere ist also (*) entscheidbar.

Wir beschreiben nun den eingangs erwähnten Entscheidungsalgorithmus von Amoroso und Patt in einer Version für p-ZR. Sei also (T,g_o) ein p-ZR, N seine p-Übergangsmatrix.

Wir konstruieren einen endlichen Baum (mit mehreren Wurzeln), dessen Knoten $K_{t_{i_1}\ldots t_{i_u}}$ in der u-ten Generation ($u \geq 1$) Mengen von Paaren $(x,y) \in \{1,\ldots,k\}^2$ mit $m_{xy}(N) \neq 0$ sind, wobei die Knotenindizes $t_{i_1}\ldots t_{i_u}$ zulässige T-Wörter der Länge u sind; und der keinen (als Menge) leeren Knoten enthält gdw $ef(T,g_o)$.

1.Generation: Wir setzen für $i = 1,\ldots,k$ als Wurzelknoten

$$K_{t_i} := \{(x,y) \mid m_{xy}(N) = t_i\}.$$

u-te Generation: Sei $K_{t_{i_1}\ldots t_{i_{u-1}}}$ ein Knoten der (u-1)-ten Generation.

Als dessen Nachfolger setzen wir die Knoten mit den Indizes $\{t_{i_1}\ldots t_{i_{u-1}} t_j \mid m_{i_{u-1}j}(N) \neq 0\}$, und zwar sei $(x',y') \in K_{t_{i_1}\ldots t_{i_{u-1}}t_j}$:gdw

$$\exists x: (x,x') \in K_{t_{i_1}\ldots t_{i_{u-1}}} \text{ und } m_{x'y'}(N) = t_j.$$

Ist $K_{t_{i_1}\ldots t_{i_u}}$ ein Knoten, so nennen wir t_{i_u} seinen Leitindex. Die Nachfolgerschaft eines Knotens ist durch dessen Leitindex und Umfang (als Menge) eindeutig bestimmt. Treten im Laufe der Entwicklung des Baumes Knoten mit gleichem Leitindex und gleichem Umfang auf, so konstruieren wir den Baum nur an einem von ihnen weiter. Da es nur endlich viele in diesem Sinne verschiedene Knoten geben kann, bricht das Verfahren ab.

Nun soll kurz angedeutet werden, warum man hiermit schon ein Entscheidungsverfahren für $ef(T,g_o)$ in der Hand hält. Sei $K_{t_{i_1}\ldots t_{i_u}}$ ein Knoten in unserem Baum. Wir betrachten die Folge

$$K_1,K_2,\ldots,K_u := K_{t_{i_1}},K_{t_{i_1}t_{i_2}},\ldots,K_{t_{i_1}\ldots t_{i_u}}.$$

Eine Kette in $K_1,\ldots,K_u$ ist eine Folge $x_1,x_2,\ldots,x_{u+1}$

mit $(x_i, x_{i+1}) \in K_i$ $(i = 1,\ldots,u)$. Man überzeugt sich von

$g(t_{x_1}\ldots t_{x_{u+1}}) = t_{i_1}\ldots t_{i_u}$ gdw

$x_1,\ldots,x_{u+1}$ ist Kette in $K_1,\ldots,K_u$.

Daraus ergibt sich sogleich

(Δ) $K_u = \emptyset$ gdw $t_{i_1}\ldots t_{i_u}$ hat keinen Vorgänger.

Damit sind wir nicht mehr weit vom Ziel. Zuvor aber führen wir zweckmäßigerweise noch ein:

Definition 3.1.4. Einen nach dem eben beschriebenen Muster konstruierten Baum nennen wir A&P-Baum von (T,g_o). Entwickeln wir einen solchen Baum auch an auftretenden gleichen Knoten weiter, so sprechen wir vom verlängerten A&P-Baum von (T,g_o).

Offenbar gilt: der A&P-Baum hat keinen leeren Knoten gdw der verlängerte A&P-Baum hat keinen leeren Knoten. Im verlängerten A&P-Baum treten nun genau die zulässigen T-Wörter (außer dem leeren Wort) als Knotenindizes auf. Da die Gültigkeit der obenstehenden Beziehung (Δ) sich auf den verlängerten A&P-Baum überträgt, haben wir

$ef(T,g_o)$ $\Leftrightarrow$ der verl. A&P-Baum hat keinen leeren Knoten

$\Leftrightarrow$ der A&P-Baum hat keinen leeren Knoten.

Ob das letztere der Fall ist, kann man entscheiden.

Zur Weiterführung der Vorbereitungen zum Beweis von Satz 3.1.2 gehen wir nun aus von dem darin angesprochenen edenfreien (S,f_o) mit $|S| = k$ und 2-stelligem f_o. Sei $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Wir betrachten folgenden p-ZR (T,g_o):

$T := S^m$

$$g_o((s_{i_1},\ldots,s_{i_m}),(s_{j_1},\ldots,s_{j_m})) :=$$

$$:= \begin{cases} \text{nicht def., falls } (s_{i_2},\ldots,s_{i_m}) \neq (s_{j_1},\ldots,s_{j_{m-1}}) \\ f(s_{i_1}\ldots s_{i_m}) f_o((s_{i_m},s_{j_m})) \text{ , sonst.} \end{cases}$$

Dieser p-ZR habe die wie oben definierte p-Übergangsmatrix N.
Zur Veranschaulichung: g_o ist nichts anderes als f angewandt auf zwei bis auf eine Stelle 'ineinandergeschobene' Elemente aus S^m (vgl. Abb.4).

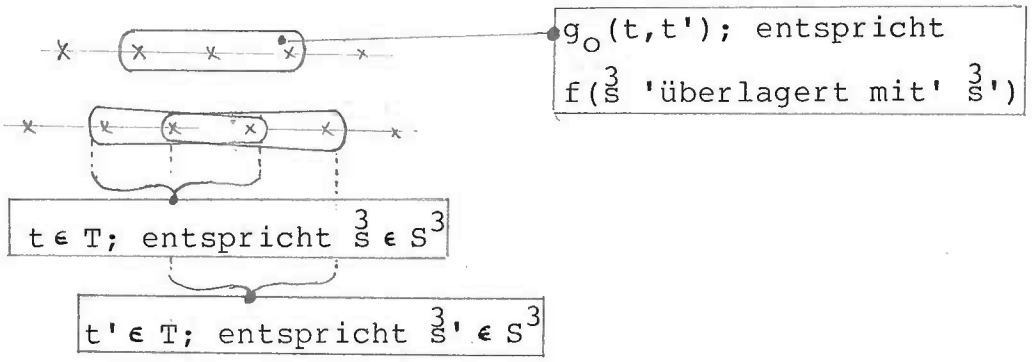


Abb.4. Beispiel für den Übergang von (S,f_o) zu (T,g_o). Hier ist $m = 3$.

Für diesen p-ZR behaupten wir nun:

Lemma 3.1.5. $ef(S,f_o) \Rightarrow g_o$ ist balanciert.

Beweis: Zunächst ist offenbar $ef(S,f_o) \Rightarrow ef(T,g_o)$. Sei $w \in \mathbb{N}$, $w \geq 1$. Wir zeigen nun: Hat ein Knoten K im verlängerten A&P-Baum von (T,g_o) w Elemente, so ist g_o balanciert, oder es existiert ein Knoten in der Nachfolgerschaft von K mit höchstens w-1 Elementen. - Daraus ergibt sich dann die Behauptung, weil wir dann aus Unbalanciertheit von g_o einen leeren Knoten ableiten könnten im Widerspruch zu $ef(T,g_o)$. - Wir setzen also voraus: ein Knoten K_o

hat w Elemente, und jeder seiner Nachfolger hat mindestens w Elemente. Dann müssen wir zeigen: g_o ist balanciert.- Wir betrachten die (m+1)-te Nachfolgegeneration von K_o. In jedem Schritt von einer Generation zur nächsten multipliziert sich die Anzahl der Knoten mit k, da wegen ef (T,g_o) jeder Knoten

$$|\{(x_o,y) \mid y \in \{1,\ldots,k^m\},\ m_{x_o y}(N) \neq O\}| = (k^m)^{1/m} = k$$

Nachfolger hat. In der (m+1)-ten Nachfolgergeneration haben wir schließlich k^{m+1} Nachfolgeknoten von K_o. Jedes (x,y) in einem Knoten K 'erzeugt' k Paare (y,z_i) mit $m_{yz_i}(N) \neq O$ in den direkten Nachfolgern von K. In der (m+1)-ten Nachfolgergeneration von K_o haben wir daher insgesamt höchstens $w \cdot k^{m+1}$ viele Elemente. Da wir hier aber k^{m+1} Knoten mit je mindestens w Elementen haben, weist hier jeder Knoten genau w Elemente auf. Unter den Leitindizes der m-ten und aller späteren Nachfolgergenerationen von K_o kommen alle Elemente aus T je gleich oft vor, da sich, anschaulich gesprochen, nach m Generationen die durch das 'Ineinanderschieben' der m-Tupel aus S^m erzeugten Restriktionen aufgelöst haben. Aus dieser 'Relaxation' folgt gleichermaßen, daß in der (m+1)-ten Generation alle $(x,y) \in T^2$ mit $m_{xy}(N) \neq O$ gleich oft als Knotenelemente auftreten, und zwar jedes solche Paar

$$\frac{w \cdot (\text{Anzahl der Knoten in (m+1)-ter Folgegeneration})}{|\{(x,y) \mid m_{xy}(N) \neq O\}|}$$

$$= (w \cdot k^{m+1})/(k^m \cdot k) = w$$

mal. Also existieren zu jedem Leitindex aus T in der (m+1)-ten Nachfolgergeneration

$$\frac{(\text{Anzahl der Knoten in (m+1)-ter Folgegeneration})}{|T|} = k$$

viele Knoten mit je w Elementen; d.h. auf jeden Leitindex kommen in der (m+1)-ten Generation nach K_o

insgesamt $w \cdot k$ viele Knotenelemente. - Im verlängerten A&P-Baum liegen gleiche Knotenelemente in Knoten mit gleichen Leitindizes. Also schöpft in der (m+1)-ten Nachfolgergeneration jeder Leitindex die Anzahl w des Vorkommen jeden Paares (x,y) mit $m_{xy}(N) \neq 0$ $(w \cdot k)/w = k$ mal aus; das heißt aber wegen des insgesamt gleichhäufigen Vorkommens aller solcher Paare (x,y) in dieser Generation, daß g_o balanciert ist.

Korollar 3.1.6. $ef(S,f_o) \Rightarrow$ jedes S-Wort der Länge m hat genau k Vorgänger.

Beweis: Die Anzahl der f-Vorgänger eines S-Wortes der Länge m ist gerade die Anzahl der g_o-Vorgänger dieses Wortes, wenn man es als Element aus T $(= S^m!)$ deutet. Diese Anzahl ist aber gleich k, wie sich aus dem Beweis des obigen Lemmas ergibt. □

Da m aber frei vorgegeben war, ist damit Satz 3.1.2 bewiesen. □□

Die eben durchgeführte Argumentation läßt sich übrigens auf beliebiges r ausdehnen, indem wir, anschaulich gesprochen, nicht nur 2, sonder r viele m-Tupel 'ineinanderschieben'.

3.2. Eine Halbgruppe und ein Entscheidungsverfahren

Wir betrachten für den Rest dieser Arbeit ausschließlich den Fall $r = 2$. Sei also ab jetzt (S,f_o) bzw. M bzw. $(M_1,\ldots,M_k)$ ein ZR.

Definition 3.2.1. Sei K eine $k \times k$ - Matrix. Dann heiße

$$|K| := \sum_{i,j \leq k} m_{ij}(K)$$

das Gewicht der Matrix.

Die Grundidee dieser Arbeit besteht darin, Fragen über Zellularräume in Fragen über gewisse Matrizenhalbgruppen umzudeuten und dann mit den in diesem Gebiet zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln zu beantworten. Die Verknüpfung beider Bereiche liefert

Lemma 3.2.2. Ist $s'^{m} := s_{i_1'} \ldots s_{i_m'} \in S^*$ und ist $L := M_{i_1'} \cdot \ldots \cdot M_{i_m'}$ das Produkt der charakteristischen Matrizen von $s_{i_1'}, \ldots, s_{i_m'}$, so gibt $m_{ij}(L)$ die Anzahl der verschiedenen Vorgänger $s_{i_1} \ldots s_{i_{m+1}}$ an, für die $i = i_1$ und $j = i_{m+1}$ ist:

$$m_{ij}(L) = \left| \left\{ s^{m+1} = s_i s_{i_2} \ldots s_{i_m} s_j \mid f(s^{m+1}) = s'^{m} \right\} \right|$$

Beweis: Induktion über m.

m = 1: ist klar.

$m \to m+1$: Sei $s'^{m+1} := s_{i_1'} \ldots s_{i_m'} s_{i_{m+1}'}$

$s'^{m} := s_{i_1'} \ldots s_{i_m'}$.

$L^{m+1} := M_{i_1'} \cdot \ldots \cdot M_{i_m'} M_{i_{m+1}'}$

$L^{m} := M_{i_1'} \cdot \ldots \cdot M_{i_m'}$.

Sei i,j gegeben. Wir schließen nun

$$\left| \left\{ s^{m+2} = s_i s_{i_2} \ldots s_{i_{m+1}} s_j \mid f(s^{m+2}) = s'^{m+1} \right\} \right|$$

$$= \sum_{a=1}^{k} \left| \left\{ (s_i s_{i_2} \ldots s_{i_m} s_a,\ s_a s_j) \mid f(s_i s_{i_2} \ldots s_{i_m} s_a) = s'^{m} \text{ und } f_o((s_a, s_j)) = s_{i_{m+1}'} \right\} \right|$$

$$\underset{\text{Ind.-Vor.}}{=} \sum_{a=1}^{k} m_{ia}(L^{m}) \cdot m_{aj}(M_{i_{m+1}'}) = m_{ij}(L^{m+1}).$$

□

Korollar 3.2.3. Seien die Bezeichnungen wie im vorangegangenen Lemma. Dann gibt das Gewicht von L die Anzahl der Vorgänger von $s_{i_1}\ldots s_{i_m}$ an:

$$|L| = |\{{}^{m+1}s \in S^* \mid f({}^{m+1}s) = {}^{m}s'\}| .$$

Beweis: Klar. □

Definition 3.2.4. Sei $u \in \mathbb{N}$, $u \geq 1$. Sei $\overline{L} := (L_1,\ldots,L_u)$ ein u-Tupel quadratischer Matrizen. Dann bezeichne $[\overline{L}]$ oder, äquivalent dazu, $[L_1,\ldots,L_u]$ die von $\{L_1,\ldots,L_u\}$ bezüglich der üblichen Matrizenmultiplikation erzeugte Halbgruppe.

Alle unsere folgenden Betrachtungen werden hauptsächlich der Untersuchung von solchen Halbgruppen $[\overline{M}]$ gewidmet sein, wo $\overline{M} = (M_1,\ldots,M_k)$ ein Zellularraum ist. Wir beginnen damit, die Halbgruppen edenfreier Zellularräume etwas näher zu charakterisieren:

Satz 3.2.5. $ef(M_1,\ldots,M_k) \Rightarrow \forall L \in [\overline{M}]\ \forall i,j: m_{ij}(L) \in \{0,1\}$.

Beweis: Zunächst ist, da die Erzeugenden $M_1,\ldots,M_k$ $\{0,1\}$ - Matrizen sind, für jedes $L \in [\overline{M}]$ und jedes i,j:

$$m_{ij}(L) \in \mathbb{N}.$$

Annahme: $\exists L \in [\overline{M}]\ \exists i,j : m_{ij}(L) = a,\ a > 1$.

Da $\sum_{x=1}^{k} M_x = (1)$, existiert ein $n \leq k$ mit $m_{ji}(M_n) = 1$.

$$\Rightarrow m_{ii}(LM_n) \geq a$$

Wegen $m_{ii}((LM_n)^b) \geq (m_{ii}(LM_n))^b \geq a^b$ ist für ein geeignetes b_o

$$m_{ii}((LM_n)^{b_o}) > k.$$

Das würde aber bedeuten: für $M_{x_1}\cdot\ldots\cdot M_{x_t} := (LM_n)^{b_o}$ gilt $|M_{x_1}\cdot\ldots\cdot M_{x_t}| > k$, d.h. wegen Korollar 3.2.3. hätte das S-Wort $s_{x_1}\ldots s_{x_t}$ mehr als k Vorgänger im Widerspruch zu Satz 3.1.2. □

Korollar 3.2.6. ef M gdw $[\overline{M}]$ enthält nur Matrizen mit je genau k Einsen und ansonsten Nullen.

Beweis: Direkt mit Satz 3.1.2, Korollar 3.2.3 und Satz 3.2.5. □

Hieraus ergibt sich ein bequemes Entscheidungsverfahren für ef M :
Ob $[\overline{M}]$ nur $\{0,1\}$ - Matrizen mit je genau k Einsen enthält, ist, da es nur endlich viele solcher Matrizen gibt und diese effektiv herstellbar sind, entscheidbar.

Bemerkung 3.2.7. Sei $ef(S,f_o)$, $\overset{m}{s} \in S^*$, $s_a,s_b \in S$. Es gilt:

$$\exists\, s_2,\ldots,s_m \in S : \; f(s_a s_2 \ldots s_m s_b) = \overset{m}{s}$$
$$\Rightarrow \exists^{=1} s_2,\ldots,s_m \in S : \; f(s_a s_2 \ldots s_m s_b) = \overset{m}{s} ,$$

d.h. ein Vorgänger eines S-Wortes ist schon durch sein erstes und sein letztes Symbol bestimmt.

Beweis: Sei $\overset{m}{s} =: s_{i_1}\ldots s_{i_m}$. Die Behauptung ergibt sich daraus, daß jeder der k Einsen in $M_{i_1}\cdot\ldots\cdot M_{i_m}$ genau sowohl ein solches Paar erster und letzter Symbole entspricht (vgl. den Beweis zu Lemma 3.2.2), als auch (Satz 3.1.2!) genau ein Vorgänger. □

Nun folgen einige Notizen, auf die wir später ab und zu zurückgreifen werden, ohne dies dann explizit zu bemerken.

Aus der eben abgeleiteten Beziehung: ef M gdw

$$(*) \qquad \forall\, L \in [\overline{M}] : \; L \text{ ist } \{0,1\}\text{-Matrix mit } |L| = k$$

folgt, daß die Edenfreiheit erhalten bleibt, wenn wir einen edenfreien ZR $(M_1,\ldots,M_k)$ so verändern, daß (*) erhalten bleibt. Die einfachsten Fälle solcher Transformationen sind solche, die $M_1,\ldots,M_k$ erhalten.

Darunter fallen die 'innere' und die 'äußere Permutation' von M:

Definition 3.2.8. Sei $\pi: S \to S$ eine Permutation. Dann sei die innere Permutation $(S,\pi_{in}f_o)$ eines ZR (S,f_o) derjenige ZR, der definiert ist durch

$$(\pi_{in}f_o)((s_i,s_j)) := \pi \circ f_o((s_i,s_j)).$$

Anschaulich gesprochen, entsteht die innere Permutation durch Permutation der Einträge im Innern der Übergangsmatrix.
Die äußere Permutation $(S,\pi_{au}f_o)$ von (S,f_o) ist definiert durch

$$(\pi_{au}f_o)((s_i,s_j)) := f_o((\pi(s_i),\pi(s_j))).$$

Anschaulich gesprochen, entsteht die äußere Permutation durch eine Permutation der Spalten/Zeilen-Köpfe der Übergangsmatrix. Zur Veranschaulichung sehen wir ein Beispiel an: Sei dazu $k = 2$, $\pi = s_1 \rightleftarrows s_2$. Sei (S,f_o) durch die Matrix M

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ gegeben. Dann erhalten wir}$$

$$(S,\pi_{in}f_o) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$(S,\pi_{au}f_o) = \begin{array}{c|cc} & 2 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die äußere Permutation von M ist nichts anderes als die Transformation P^tMP der Übergangsmatrix, wobei P die zu π gehörende Spaltenpermutationsmatrix ist:

$$m_{ij}(P) := \begin{cases} 1, & \text{falls } i = \pi(j) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Umgekehrt entspricht jeder Transformation P^tMP, wo P eine Transformationsmatrix ist (d.h. P hat in jeder Spalte und Zeile genau eine Eins und ansonsten Nullen),

eine äußere Permutation von M. Das heißt insbesondere, daß Transformationen vom Typ P^tMP Edenfreiheit erhalten; dies würde auch direkt aus der Beziehung

$$L \in [M_1,\ldots,M_k] \text{ gdw } P^tLP \in [P^tM_1P,\ldots,P^tM_kP]$$

folgen, welche ihrerseits eine unmittelbare Konsequenz von $PP^t = id$ ist.

3.3. Zellularräume mit Edenkonfigurationen

Wir beweisen nun einen Satz, der zeigt, daß Halbgruppen $[\overline{M}]$ sehr verschiedene Gestalt haben je nach dem, ob sie von edenfreien Zellularräumen herrühren oder nicht.

Satz 3.3.1. Seien $M_1,\ldots,M_m$ $\{0,1\}$ - Matrizen der Größe $k \times k$ mit $\Sigma M_x = (1)$. Seien φ_1, φ_2 die Aussagen

$$\varphi_1 : (0) \in [M_1,\ldots,M_m]$$

$$\varphi_2 : \forall n \in \mathbb{N}\ \exists L \in [M_1,\ldots,M_m] : |L| > n.$$

Dann gilt:

1) $m < k \Rightarrow \varphi_2$

2) $m = k \Rightarrow \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$

3) $m > k \Rightarrow \varphi_1$

Beweis: Wir zeigen zunächst 2). Sei also $m = k$, d.h. $(M_1,\ldots,M_k)$ ist ZR.
"$\varphi_2 \rightarrow \varphi_1$": Folgt aus Korollar 3.2.6 und der unmittelbar einsichtigen Beziehung

$$(0) \in [\overline{M}] \text{ gdw } \neg \text{ ef } M.$$

"$\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$":

1. Fall: $\forall L \in [\overline{M}]: |L| \leq k$.

Wir zeigen, daß dann schon gilt:

$$\forall L \in [\overline{M}]: |L| = k.$$

Zunächst überzeugen wir uns von der Beziehung

$$(*) \quad \forall u \in \mathbb{N},\ u \geq 1: \sum_{\substack{x_1,\ldots,x_u \\ \in \{1,\ldots,k\}}} M_{x_1} \cdot \ldots \cdot M_{x_u} = (k^{u-1})$$

durch fortgesetzte Anwendung des Distributivgesetzes:

$$\sum M_{x_1} \ldots M_{x_u} = \sum_{y=1}^{k} M_y \Big(\sum_{\substack{x_2,\ldots,x_u \\ \in \{1,\ldots,k\}}} M_{x_2} \ldots M_{x_u} \Big) =$$

$$= (1) \sum M_{x_2} \ldots M_{x_u} = \ldots = (1)^u = (k^{u-1}) .$$

Nun nehmen wir an, daß für ein $L_o \in \overline{M}$, $L_o = M_{y_1} \ldots M_{y_{u_o}}$

$$|L_o| < k$$

gelte. Da die Summe $\sum_{\substack{x_1,\ldots,x_{u_o} \\ \in \{1,\ldots,k\}}} M_{x_1} \ldots M_{x_{u_o}}$

k^{u_o} Summanden hat, und

$$\Big| \sum M_{x_1} \ldots M_{x_{u_o}} \Big| = \sum |M_{x_1} \ldots M_{x_{u_o}}| ,$$

und ein Summand, nämlich L_o, ein Gewicht kleiner als k hat, und wegen (*)

$$\Big| \sum M_{x_1} \ldots M_{x_{u_o}} \Big| = k^{u_o+1}$$

gilt, muß ein anderer Summand ein Gewicht größer als k haben. Das steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung dieses Falles.

2. Fall: $\exists v_o \in \mathbb{N}$, $v_o > k$, so daß

a) $\forall L \in [\overline{M}]: |L| \leq v_o$

b) $\exists L_o \in [\overline{M}]: |L_o| = v_o$

gelten. Dies führen wir zu einem Widerspruch.

Wir betrachten $\sum_{x=1}^{k} L_o M_x =: N_1$ und $\sum_{x=1}^{k} M_x L_o =: N_2$.

L_o ist eine $\{0,1\}$ - Matrix (sonst ergäbe sich ein Widerspruch zu a) mit dem im Beweis zu Satz 3.2.5 verwendeten Argument). Es ist $N_1 = L_o \cdot (1)$. Bezeichnet e_i die Anzahl der Einsen in der i-ten Zeile von L_o, so hat N_1 die Gestalt $m_{ij}(N_1) = e_i$, d.h. N_1 sieht so aus:

$$N_1 = \begin{pmatrix} e_1 & e_1 & \cdots & e_1 \\ e_2 & e_2 & \cdots & e_2 \\ \cdots & & & \\ e_k & e_k & \cdots & e_k \end{pmatrix}$$

Bezeichnet e_j' die Anzahl der Einsen in der j-ten Spalte von L_o, so erhält man für N_2 eine der von N_1 entsprechende einfache Form $m_{ij}(N_2) = e_j'$.
Multipliziert man N_1 fortgesetzt von rechts mit N_2, erhält man aufgrund dieser einfachen Gestalten wieder recht einfache Produkte:

$$m_{ij}(N_1 N_2) = k e_i e_j'$$

$$m_{ij}(N_1 N_2^2) = k \sum_{a=1}^{k} e_i e_a' e_j' = k e_i e_j' \sum e_a' = k e_i e_j' v_o$$

$$\cdots$$

$$(*) \quad m_{ij}(N_1 N_2^u) = k e_i e_j' v_o^{u-1}$$

Unter Ausnutzung von $v_o \geq k+1$ und der Binomialentwicklung der Potenz einer Summe schätzen wir ab:

$$v_o^{u-1} \geq (k+1)^{u-1} > k^{u-1} + (u-1)k^{u-2} ,$$

woraus sich für $u_o \geq k^2$ mit (*) ergibt:

$$v_o^{u_o-1} > k^{u_o} .$$

Das heißt: für i_o, j_o mit $e_{i_o} \neq 0$, $e_{j_o}' \neq 0$ ist

$$m_{i_o j_o}(N_1 N_2^{u_o}) > k^{u_o+1} .$$

Da aber $N_1 N_2^{u_o}$ als Summe von k^{u_o+1} Elementen aus $[\overline{M}]$ geschrieben werden kann, muß für mindestens einen dieser Summanden, etwa für L_1, gelten:

$$m_{i_o j_o}(L_1) > 1 .$$

Daraus ergibt sich aber wieder wie im Beweis von Satz 3.2.5. ein Widerspruch zu a).

Damit ist aber "$\varphi_1 \to \varphi_2$" bewiesen, da Fall 1 $\Rightarrow \neg \varphi_1$, Fall 2 unmöglich und stets (Fall 1 oder Fall 2 oder φ_2). Nun zeigen wir 1). Sei $m < k$. Wir fügen zu $M_1,\ldots,M_m$ noch k-m Nullmatrizen $M_{m+1},\ldots,M_k$ hinzu. Mit 2) erhalten wir: für $M_1,\ldots,M_k$ gilt φ_2. Dann gilt φ_2 aber erst recht für $M_1,\ldots,M_m$.

Nun zu 3). Sei $m > k$. Wir suchen m-k+1 Matrizen aus $\{M_1,\ldots,M_m\}$ aus, die

$$\left| \sum_{a=1}^{m-k+1} M_{i_a} \right| \neq k$$

erfüllen, und betrachten die von dieser Summe und den nicht in sie eingegangenen Ausgangsmatrizen erzeugte Halbgruppe $[M_1',\ldots,M_k']$. Mit Hilfe von 2) und Korollar 3.2.6 folgt

$$(O) \in [M_1',\ldots,M_k']$$

und damit erst recht

$$(O) \in [M_1,\ldots,M_m].$$

□

Korollar 3.3.2.

a) Sei $k' \leq k$. Sei für eine $k \times k$ - Matrix K K' die $k' \times k'$ - Matrix, die definiert ist durch

$$m_{ij}(K') = m_{ij}(K) \qquad (i,j \in \{1,\ldots,k'\})$$

Sei M ZR. Dann gilt: hat in einer Transformierten $P^t MP$ die Matrix $(P^t MP)'$ weniger als k' verschiedene Einträge, so ist $\neg$ ef M.

b) Edenfreiheit vererbt sich auf Unterräume, d.h.

$$(S',f'_o) \subset (S,f_o) \quad \Rightarrow \quad ef(S,f_o) \rightarrow ef(S',f'_o) \ .$$

Beweis: zu a): Habe $(P^tMP)'$ weniger als k' verschiedene Einträge. Wegen Satz 3.3.1, Teil 1) enthält dann $\overline{[(P^tMP)']}$ bezüglich ihrer Gewichte beliebig große Elemente. Wegen

$$\forall\ P^tM_{i_1}\ldots M_{i_u}P \in \overline{[P^tMP]}\ :$$

$$|P^tM_{i_1}\ldots M_{i_u}P| \geq |(P^tM_{i_1}P)'\ldots(P^tM_{i_u}P)'|$$

hat dann aber auch $\overline{[P^tMP]}$ beliebig große Elemente und ist deshalb nicht edenfrei. Das überträgt sich aber auf $\overline{[M]}$.

zu b): analog; wir machen uns dabei zunutze, daß jeder Unterraum einem wie oben erhaltenen M' entspricht. □

D. Richardson zeigte 1972 (referiert in AMOROSO und PATT 1972) für die globale Übergangsfunktion F :

F injektiv $\Rightarrow$ F surjektiv.

Dieses Resultat können wir nun verstärken:

Bemerkung 3.3.3. Für einen eindimensionalen ZR (S,f_o), $|S| = k$, $r = 2$ sind äquivalent:

a) F ist "k-injektiv", d.h.
$\forall c' \in C\ \exists^{\leq k} c : F(c) = c'$

b) F ist "beschränkt injektiv", d.h.
$\exists\ n \in \mathbb{N}$: F ist n-injektiv

c) F ist surjektiv.

Beweis: "a) ⇒ b)": trivial.
"b) ⇒ c)": Sei F nicht surjektiv, $n \in \mathbb{N}$. Wir müssen zeigen: F nicht n-injektiv.
Daß F nicht surjektiv ist, heißt nichts anderes, als daß $\neg$ ef (S,f_o). Nach Satz 3.3.1, Teil 2), existiert ein $L \in [\overline{M}]$ mit $|L| > k^2 n$, d.h. L hat einen Eintrag $a := m_{i_o j_o}(L) > n$. Sei $L = M_{j_1} \ldots M_{j_u}$. Dann hat das S-Wort $s_{j_1} \ldots s_{j_u}$ a verschiedene Vorgänger $\overline{s}_1, \ldots, \overline{s}_a$ der Gestalt $s_{j'_1} \ldots s_{j'_{n+1}}$ mit $s_{j'_1} = s_{i_o}$ und $s_{j'_{n+1}} = s_{j_o}$. Dann hat aber jede der a Konfigurationen der Gestalt $\ldots s_1 s_1 \overline{s}_i s_1 s_1 \ldots$ $(i = 1, \ldots, a)$ denselben Nachfolger, d.h. F ist nicht n-injektiv.
"c) ⇒ a)": Gäbe es ein $c \in C$ mit mehr als k Vorgängern, dann hätte schon eine "endliche Teilkonfiguration $\overline{s} \subset c$" (die Bedeutung dieser saloppen Ausdrucksweise ist klar) mehr als k f-Vorgänger. Das stünde im Widerspruch zu Satz 3.1.2. □

Man kann eine entsprechende Bemerkung auch für den Fall $r > 2$ formulieren, nur muß dann die Schranke in a), etwa mit Hilfe von Lemma 2.2.4, in Abhängigkeit von r angegeben werden.

4. Zur Gestalt edenfreier Zellularräume

Übersicht über diesen Abschnitt. Wir untersuchen $[\overline{M}]$, um Rückschlüsse auf die Gestalt von M zu ziehen. Der Ausgangspunkt dabei ist die Beobachtung, daß durch gewisse fortgesetzte Multiplikationen aus den Ausgangsmatrizen $M_1,\ldots,M_k$ solche von besonders einfacher Gestalt entstehen (4.1). Mit diesen läßt sich dann eine charakteristische Zerlegung $k = \varrho\sigma\tau$ definieren (4.2), welche auch anschaulich gedeutet werden kann (4.4) und für den Fall $k = p$ zu einer vollständigen Aufklärung der Struktur edenfreier Zellularräume führt (4.3). Erste Einblicke in allgemeinere Fälle liefern zwei hinreichende Bedingungen für Edenfreiheit, welche auch die Konstruktion von Beispielen solcher Zellularräume leicht werden läßt (4.4). Vertieft werden diese Aufschlüsse durch die Aufdeckung weiterer, etwas komplizierterer Gesetzmäßigkeiten (4.5).

Sei in diesem Abschnitt (S,f_o) bzw. M bzw. $(M_1,\ldots,M_k)$ stets ein e d e n f r e i e r Zellularraum.

4.1. Konvergenz zur einfachen Gestalt

Definition 4.1.1. Für eine Matrix L sei der Vektor $Z_i(L)$ die i-te Zeile von L. Die Anzahl der Einsen in $Z_i(L)$ heiße $e_i(L)$.
Eine Zeile oder eine Spalte in einer Matrix heiße positiv, wenn sie von $(0,\ldots,0)$ verschieden ist. Sei $|Z|(L)$ die Anzahl der positiven Zeilen in L. $S_j(L)$, $e'_j(L)$ und $|S|(L)$ seien die entsprechenden, auf die Spalten von L bezogenen Größen.

Jetzt folgt das entscheidende 'Konvergenz'-Lemma:

Lemma 4.1.2. Sei $L \in [\overline{M}]$. Die positiven Zeilen von L mögen nicht alle gleichviele Einsen enthalten, d.h.

$$\exists i,j : \quad e_i(L) > e_j(L) > 0.$$

Dann existiert $M_x \in \{M_1,\ldots,M_k\}$, so daß

$$|Z|(LM_xL) < |Z|(L).$$

Entsprechendes gilt für die Spalten.

Beweis: Wir zeigen die Behauptung für die Zeilen. Habe also L 'ungleichgewichtige' positive Zeilen. Da L insgesamt k Einsen aufweist, existiert eine Zeile $Z_{i_o}(L)$ mit

$$e_{i_o}(L) > \frac{k}{|Z|(L)} .$$

Wir betrachten $N_1 := L \cdot \sum_{x=1}^{k} M_x = L \cdot (1)$.

Sei G_1 die Menge der Indexpaare

$$G_1 := \{(i_o,j) \mid Z_j(L) \text{ positiv}\} .$$

Es ist $m_{ij}(N_1) = e_i(L)$ und deswegen

$$\sum_{(i,j)\in G_1} m_{ij}(N_1) = |Z|(L) \cdot e_{i_o}(L) .$$

Da N_1 als Summe von k Matrizen der Form $LM_x \in [\overline{M}]$ geschrieben werden kann und N_1 im Gebiet G_1 eine Elementesumme $|Z|(L) \cdot e_{i_o}(L) > k$ hat, muß mindestens einer der Summanden in G_1 mindestens zwei Einsen aufweisen.

Sei G_2 die Menge von Indexpaaren

$$G_2 := \{(i,j) \mid 1 \leq i \leq n,\ Z_j(L) \text{ positiv}\}.$$

Es ist

$$\sum_{(i,j)\in G_2} m_{ij}(N_1) = k \cdot |Z|(L).$$

Wir modifizieren unser eben schon benutztes Argument:
Da N_1 Summe von k Matrizen aus $[\overline{M}]$ ist,
- und einer dieser Summanden in G_2 mindestens zwei Einsen in derselben Zeile (nämlich in $Z_{i_o}(L)$) hat,
- und die Elementensumme von N_1 in G_2 gleich $k \cdot |Z|(L)$ ist,

muß mindestens ein Summand in G_2 weniger als $|Z|(L)$ Einsen aufweisen, oder ein Summand hat Einsen in G_2 höchstens in $|Z|(L)-1$ verschiedenen Zeilen; - d.h. aber:
Ein Summand LM_{x_o} hat Einsen in G_2 höchstens in $|Z|(L)-1$ verschiedenen Zeilen.
Da aber für jede $k \times k$ - Matrix A

$$AL = (A \restriction G_2)L ,$$

wobei

$$m_{ij}(A \restriction G_2) := \begin{cases} m_{ij}(A), & \text{falls } (i,j) \in G_2 \\ 0, & \text{sonst;} \end{cases}$$

und

$$Z_i(A) = (0,\ldots,0) \Rightarrow Z_i(AL) = (0,\ldots,0)$$

gelten, hat $(LM_{x_o})L$ höchstens $|Z|(L)-1$ von $(0,\ldots,0)$ verschiedene Zeilen. □

Definition 4.1.3. Erfülle $L \in [\overline{M}]$

a) $\forall i,j$: $Z_i(L)$, $Z_j(L)$ positiv $\rightarrow$ $s_i(L) = s_j(L)$
b) $\forall i,j$: $S_i(L)$, $S_j(L)$ positiv $\rightarrow$ $e_i^!(L) = e_j^!(L)$.

Dann heißt L einfach, und $\sigma(L)$ bzw. $\tau(L)$ seien die Anzahlen von Einsen in den positiven Zeilen bzw. Spalten von L.

Definition 4.1.4. Ist X eine Halbgruppe, $a \in X$, so heißt a Idempotenz, falls $a^2 = a$.

Allgemein gilt (vgl. z.B. CLIFFORD und PRESTON 1961, p. 20): Ist a Element einer endlichen Halbgruppe,

so existiert ein $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, so daß $a^n \cdot a^n = a^n$, d.h. eine gewisse Potenz von a ist Idempotenz.

Definition 4.1.5. Sei $\varrho(A)$ der in der linearen Algebra definierte Rang einer Matrix A. Sei

$$\varrho(M) := \min \{ \varrho(L) \mid L \in [\overline{M}] \}$$

der kleinste in $[\overline{M}]$ vorkommende Rang.

Nun haben wir die Hilfsmittel beisammen, um ein Halbgruppenelement mit sehr speziellen Eigenschaften aufzuspüren:

Satz 4.1.6. Es existiert ein $I \in [\overline{M}]$ mit

1) I ist Idempotenz,
2) $\varrho(I) = \varrho(M)$,
3) I ist einfach.

Beweis: Der Beweis ist im Grunde sehr einfach. Eine ausführliche Darstellung würde aber recht lang werden und durch eine Vielzahl ephemerer Begriffsbildungen mehr verwirren als erhellen. Aus diesem Grunde werden wir uns hier, wie auch in einigen folgenden ähnlichen Beweisen, auf eine Skizze beschränken.

Wir gehen aus von einem beliebigen $L_o \in [\overline{M}]$ mit $\varrho(L_o) = \varrho(M)$.

Da die Anzahl der positiven Zeilen (bzw. Spalten) einer Matrix aus $[\overline{M}]$ nach unten beschränkt ist (trivialerweise durch 0, aber auch z.B. durch $\varrho(M)$),

- und wir bei ungleichgewichtigen Zeilen (bzw. Spalten) nach Lemma 4.1.2 durch Links- (bzw. Rechts-) multiplikation mit geeigneten Matrizen aus $[\overline{M}]$ die Anzahl der positiven Zeilen (bzw. Spalten) echt reduzieren können,

- und weil bei Multiplikation von links (bzw. rechts) die Anzahl der positiven Spalten (bzw. Zeilen) nicht wieder wachsen kann,
- und der Rang eines Produktes höchstens so groß wie der Rang eines jeden seiner Faktoren ist,

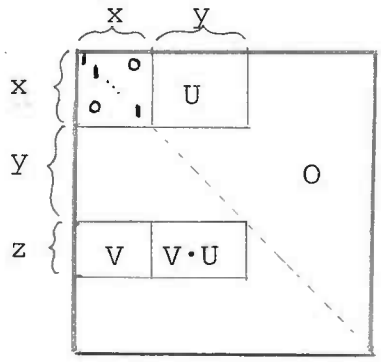
erhalten wir durch sukzessive Links- und Rechtsmultiplikation mit geeigneten Elementen aus $[\overline{M}]$ schließlich ein $L_1 = L_o' L_o L_o''$, $L_o', L_o'' \in [\overline{M}]$, das Rang $\varrho(M)$ hat und einfach ist.
Eine Potenz $L_1^{m_1}$ von L_1 ist nach der diesem Satz vorangegangenen Bemerkung Idempotenz. $L_1^{m_1}$ hat je höchstens so viele positive Zeilen und Spalten wie L_1. Ist $L_1^{m_1}$ nicht einfach, so wiederholen wir das eben beschriebene Verfahren mit $L_1^{m_1}$ als Ausgangsmatrix. Diese Verfahren wiederholen wir solange, bis schließlich ein $L_{i_o}^{m_{i_o}}$ einfach ist. Dies muß einmal der Fall sein, da bei jedem Iterationsschritt die Anzahl der positiven Zeilen und/oder Spalten echt abnimmt. $L_{i_o}^{m_{i_o}}$ hat aber alle gewünschten Eigenschaften. □

4.2. Eine charakteristische Zerlegung von k

Wir zitieren zunächst ohne Beweis einen Satz über nichtnegative idempotente Matrizen, den wir gleich in einer auf unsere Verhältnisse zugeschnittenen Version für $\{0,1\}$- Matrizen formulieren. Der Satz findet sich im Zusammenhang dargestellt bei BERMAN und PLEMMONS (1979, p.65). Zuerst bewiesen wurde er von FLOR (1969).

Satz 4.2.1. Sei I eine $\{0,1\}$ - Matrix der Größe $k \times k$. Dann gilt: I ist Idempotenz und hat Rang x gdw es existiert eine Transformierte der Gestalt

$P^t IP =$



worin $x+y+z \leq k$, $x,y,z \geq 0$, und U,V beliebige $x \times y$ (bzw. $z \times x$) - Matrizen sind, deren Spalten (im Falle von U) bzw. deren Zeilen (im Falle von V) alle positiv sind. □

Aus diesem Satz ergibt sich das für uns wichtige

Korollar 4.2.2. Eine einfache Idempotenz $I \in [\bar{M}]$ ist durch eine geeignete Transformation auf die folgende Gestalt zu bringen:

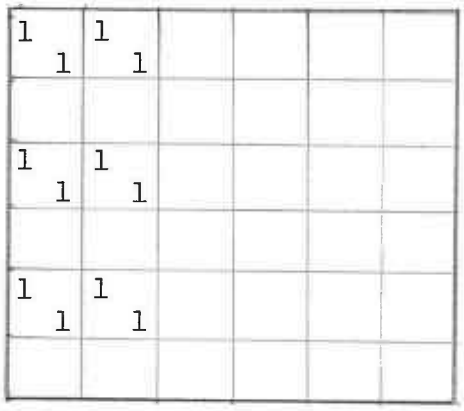
$$P^t IP = \begin{pmatrix} A_1 & O \ldots O \\ A_2 & O \ldots O \\ \ldots & \\ A_{\tau(I)} & O \ldots O \end{pmatrix}$$

Darin sind die A_i paarweise gleiche quadratische Matrizen der Gestalt

$$A_i = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & \ldots & K_{\sigma(I)} \\ O & O & \ldots & O \\ & & \ldots & \\ O & O & \ldots & O \end{pmatrix}$$

Darin hinwiederum sind die K_i alle gleich der $\varrho(I) \times \varrho(I)$ - Identität.

Ein Beispiel: $\varrho(I) = \sigma(I) = 2$, $\tau(I) = 3$:



Beweis (Skizze): Sei I einfache Idempotenz.
Für Permutationsmatrizen P gilt

$(*)$ P^tIP einfach gdw I einfach

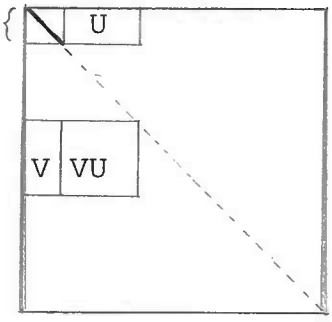
und $(**)$ $\varrho(P^tIP) = \varrho(I)$, $\sigma(P^tIP) = \sigma(I)$, $\tau(P^tIP) = \tau(I)$.

Für die folgenden Zeichnungen wählen wir beispielhaft $\sigma(I) = \tau(I) = 3$. Die $\varrho(I) \times \varrho(I)$ - Identitäsmatrix stellen wir bildlich dar durch

.

Nach Satz 4.2.1 haben wir für geeignetes P_1:

$I_1 := P_1^tIP_1 =$



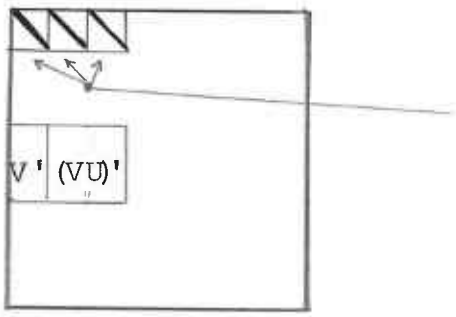
Solche Transformationen erhalten die Idempotenz-Eigenschaft!

Im folgenden beachten wir mehrfach stillschweigend (**).
Wegen (*) stehen in jeder Zeile von U $\sigma(I)-1$ Einsen.
Es steht überdies in jeder Spalte von U genau eine Eins.
Denn hätte etwa eine Spalte $S_{j_o}(I_1)$ im Gebiet von U zwei Einsen, etwa in den Zeilen i_1 und i_2 $(i_1, i_2 \leq \varrho(I))$, so wäre in I_1^2 (= I_1 !)

$$e'_{j_o}(I_1^2) > e'_{i_1}(I_1) > 0$$

im Widerspruch zur Einfachheit von I_1.
Also können wir durch eine weitere Transformation erhalten:

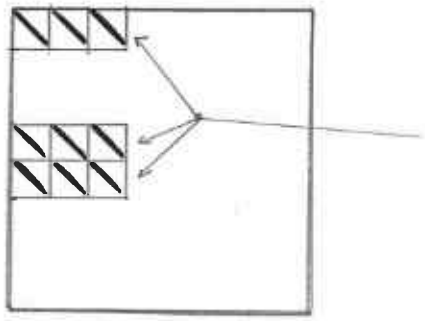
$I_2 := P_2^t I_1 P_2$ =



$\sigma(I)$ mal

Aus $I_2^2 = I_2$ leitet man ab, daß sich in I_2 Spalten, die sich in den ersten $\varrho(I)$ Stellen gleichen, auch in den übrigen gleichen. Daraus ergibt sich die Möglichkeit einer weiteren Transformation mit dem Ergebnis

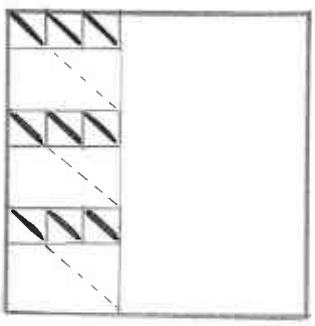
$I_3 := P_3^t I_2 P_3$ =



$\tau(I)$ mal

und mit einem weitern vergleichbaren Übergang das gewünschte

$I_4 := P_4^t I_3 P_4$ =



□

Definition 4.2.3. Die eben konstruierte Form einer einfachen Idempotenz nennen wir ihre Normalform.

Ist I eine einfache Idempotenz, P^tIP ihre Normalform, so ist P nicht eindeutig bestimmt!

Ist I einfache Idempotenz, so ersieht man aus ihrer Normalformdarstellung, daß

$$k = \varrho(I) \cdot \sigma(I) \cdot \tau(I)$$

eine Faktorzerlegung von k ist. Nach Satz 4.1.6 existieren in $[\overline{M}]$ einfache Idempotenzen von minimalem Rang. Solche Idempotenzen führen alle zur selben Zerlegung von k:

Satz 4.2.4. Sind $I,J \in [\overline{M}]$ einfache Idempotenzen mit $\varrho(I) = \varrho(J) = \varrho(M)$, so gilt

$$\sigma(I) = \sigma(J) \quad \text{und} \quad \tau(I) = \tau(J).$$

Beweis: Sei der Übersichtlichkeit halber

$$\sigma := \sigma(I), \quad \tau := \tau(I), \quad \sigma' := \sigma(J), \quad \tau' := \tau(J), \quad \varrho := \varrho(M).$$

Sei OBdA I in Normalform (sonst betrachten wir geeignetes P^tMP). Aus der regelmäßigen Gestalt von I leitet sich ab:

$$(*) \quad \forall j_1, j_2 \leq \varrho\sigma: \; j_1 \equiv j_2 \pmod{\varrho} \Rightarrow S_{j_1}(JI) = S_{j_2}(JI).$$

Für $j \leq \varrho\sigma$ ist $S_j(JI)$ positiv, denn andernfalls hätte JI wegen $(*)$ weniger als ϱ verschiedene positive Spalten und damit einen Rang kleiner als ϱ im Widerspruch zu dessen Minimalität.

Da jede positive Spalte in JI mindestens τ' Einsen aufweist, gilt für die Anzahl $e_j^!(JI)$ von Einsen in der j-ten Spalte von JI:

$$j \leq \varrho\sigma \Rightarrow e_j^!(JI) \geq \tau'.$$

Wegen $|JI| = k$ und

$$j > \varrho\sigma \Rightarrow S_j(JI) = (0,\ldots,0)$$

folgt daraus aber

$$\varrho\sigma\tau' \leq k \ .$$

Durch Betrachtung von IJ erhalten wir analog

$$\varrho\sigma'\tau \leq k,$$

und mit diesen beiden Ungleichungen mit Zuhilfenahme von $\varrho\sigma\tau = \varrho\sigma'\tau' = k$:

$$\sigma = \sigma' \quad \text{und} \quad \tau = \tau' \ . \qquad \square$$

Definition 4.2.5. Die nach dem eben gezeigten Satz nicht von einer speziellen Wahl einer einfachen Idempotenz I minimalen Ranges abhängigen Größen $\sigma(I)$, $\tau(I)$ schreiben wir auch $\sigma(M)$ und $\tau(M)$ und nennen

$$k = \varrho(M) \cdot \sigma(M) \cdot \tau(M)$$

die charakteristische Zerlegung von k. Ist der Bezug auf M klar, dann schreiben wir auch kürzer $k = \varrho\sigma\tau$.

Eine anschauliche Deutung werden $\varrho(M)$, $\sigma(M)$ und $\tau(M)$ im Abschnitt 4.4 erfahren.

4.3. Der Fall k = p

Definition 4.3.1. $L \in [\overline{M}]$ heißt Zeilenmatrix (bzw. Spaltenmatrix), falls

$$\forall i \leq k: \quad e_i(L) = 1 \quad (\text{bzw. } e_i'(L) = 1).$$

Lemma 4.3.2.

a) $\tau(M) = 1$ gdw $\forall L \in [\overline{M}]$: L ist Spaltenmatrix

b) $\sigma(M) = 1$ gdw $\forall L \in [\overline{M}]$: L ist Zeilenmatrix.

Beweis: Wegen der völligen Symmetrie von a) und b) brauchen wir nur a) zu behandeln.

" $\Leftarrow$ ": trivial.

" $\Rightarrow$ ": (Skizze) Sei I_o einfache Idempotenz minimalen Ranges, oBdA in Normalform.
Annahme: ex. $L_o \in [\bar{M}]$: L_o ist keine Spaltenmatrix.
Dann hat L_o Nullspalten. Wir betrachten I_oL_o. Dies ist eine Matrix, in der höchstens die ersten $\varrho(I_o)$ Zeilen positiv sind, und die eine Nullspalte hat. Durch ein Iterationsverfahren wie das im Beweis zu Satz 4.1.6 skizzierte erhalten wir aus I_oL_o eine einfache Idempotenz I_1, die dort, wo I_oL_o Nullzeilen oder Nullspalten hat, ebensolche aufweist. Dann wäre aber $\tau(I_1) \neq 1$ im Widerspruch zu Satz 4.2.4. □

Satz 4.3.3. Ist die Anzahl der Elemente von S prim, d.h. $k = p$, so gilt:

ef M gdw $M_1,\ldots,M_p$ sind Spaltenmatrizen oder
$M_1,\ldots,M_p$ sind Zeilenmatrizen.

Beweis: " $\Leftarrow$ " gilt unabhängig von k und beruht darauf, daß die Eigenschaft 'Spaltenmatrix' (bzw. 'Zeilenmatrix') bei der Multiplikation von Matrizen erhalten bleibt.
" $\Rightarrow$ " ergibt sich aus Lemma 4.3.2 und
$\varrho\sigma\tau = p \Rightarrow \sigma = 1$ oder $\tau = 1$. □

Es gibt also im wesentlichen drei verschiedene Typen von edenfreien Zellularräumen mit Primzahlordnung:

1) $\sigma = p$, d.h. $M_1,\ldots,M_p$ sind Spaltenmatrizen, und nicht alle davon sind auch Zeilenmatrizen;
2) $\tau = p$, der duale Fall zu 1);
3) $\varrho = p$, d.h. $M_1,\ldots,M_p$ sind sowohl Zeilen- als auch Spaltenmatrizen, d.h. sie sind Permutationsmatrizen.

4.4. Zwei hinreichende Bedingungen

Wir geben zunächst für den einfachen Fall $\tau(M) = 1$ eine hinreichende Bedingung dafür an, daß für einen gegebenen Teiler n von k $\varrho(M) \geq n$ ist.
Diese Bedingung weist in ihrem Grundprinzip auf Schwierigkeiten hin, die wir bei dem Versuch zu erwarten haben, ähnlich wie im Falle $k = p$ die Struktur auch solcher edenfreier Zellularräume aufzuklären, wo k keine Primzahl ist. - Wir führen zunächst einige Bezeichungen ein.

Sei $n = n_1 \cdot n_2$, $n \mid k$. Die Voraussetzung $\tau(M) = 1$ gestattet uns, $M_x \in \{M_1,\ldots,M_k\}$ als Abbildung

$$M_x : \{1,\ldots,k\} \to \{1,\ldots,n\} \quad \text{aufzufassen:}$$

$$M_x(j) = i \quad :\text{gdw} \quad \exists i' : \; i' \equiv i \pmod{n},\ m_{i',j}(M_x) = 1.$$

Sei für $a \in \{1,\ldots,n_1\}$, $b \in \{1,\ldots,\frac{k}{n}\}$

$$U(b,a) := \{d \in \mathbb{N} \mid (b-1)n + (a-1)n_2 < d \leq (b-1)n + an_2\}$$

die <u>(b,a)-te Umgebung in $\{1,\ldots,k\}$</u>.

Nun formulieren wir die erwähnte Bedingung:

<u>Lemma 4.4.1.</u> Sei für $x \in \{1,\ldots,k\}$ $\pi_x : \{1,\ldots,n_1\} \to \{1,\ldots,n_1\}$ eine Permutation. Es sei $\tau(M) = 1$. Für jedes x aus $\{1,\ldots,k\}$ erfülle die Abbildung M_x

(*) $\forall b \in \{1,\ldots,\frac{k}{n}\}\ \forall a \in \{1,\ldots,n_1\} : \; M_x(U(b,a)) = U(1,\pi_x(a))$.

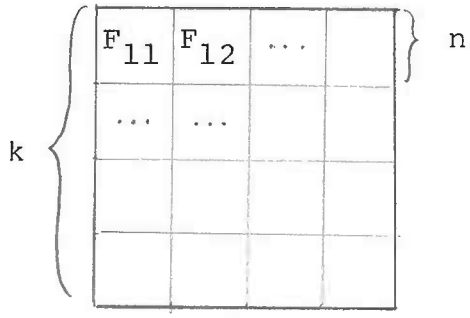
Dann ist $\varrho(M) \geq n$.

<u>Beweis:</u> Diese Behauptung ist beinahe trivial, wenn man sich die Bedeutung von (*) erst einmal anschaulich klargemacht hat. Das werden wir aber gleich anschließend im Beispiel 4.4.2 tun. Wir begnügen uns darum hier mit der Skizze einer Skizze: Man überlegt, daß (*) bei Matrizenmultiplikation erhalten bleibt. Jede Matrix mit (*) hat aber einen Rang

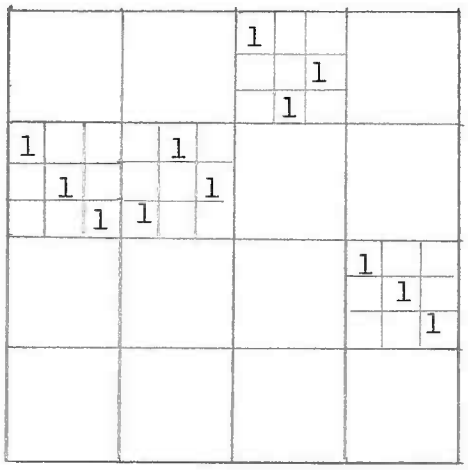
größer oder gleich n. □

Beispiel 4.4.2. Wir veranschaulichen uns, was (*) für die beiden Extremfälle a) $n = 1 \cdot n_2$ und b) $n = n_1 \cdot 1$ besagt.

zu a): Wir teilen das $k \times k$ - Feld in Unterfelder $F_{i,j}$, der Größe $n \times n$ ein (in der Zeichung ist beispielhaft $k = 4n$):



Dann heißt (*) nichts anderes, als daß die Spur $M_x \upharpoonright F_{i,j}$, ($M_x \in \{M_1, \ldots, M_k\}$) in einem Feld $F_{i,j}$ entweder die $n \times n$ - Nullmatrix oder eine $n \times n$ - Permutationsmatrix ist; und daß für jeden 'Grobindex' j_o genau ein $F_{i,j_o} \neq (0)$ wird; - d.h. M_x sieht 'bei grober Auflösung', um einen Vergleich aus der Optik zu wählen, wie eine Spaltenmatrix aus. Ein Beispiel einer solchen M_x wäre etwa (n = 3, k = 12):



zu b): Hier besagt (*): Die Zeilenindizes von Einsen in kongruenten (mod n) Spalten sind kongruent und umgekehrt:

$$m_{i_1 j_1}(M_x) = m_{i_2 j_2}(M_x) = 1 \Rightarrow i_1 \equiv i_2 \pmod{n} \leftrightarrow j_1 \equiv j_2 \pmod{n}.$$

Vermittelnd zwischen a) und b) stehen die Fälle, wo die Felder $F_{i',j'}$ nochmals in 'mittelfeine' Felder $F_{i'',j''}$ der Kantenlänge n_2 unterteilt werden. Die Spur von M_x auf diesen mittelfeinen Feldern ist entweder die Null- oder eine Permutationsmatrix. Die 'mittelfeinen Permutationsfelder' verhalten sich in 'mittelfeiner Auflösung' entsprechend zu den Einsen in b) und in 'vollständiger Auflösung' entsprechend zu den Feldern $F_{i',j'}$ von a).

Bringt Lemma 4.4.1 einen Gesichtspunkt einer zu berücksichtigenden Vielfalt ins Spiel, so betont die folgende (viel schönere!) Bedingung eher ein ordnendes, integrierendes Betrachtungsprinzip.

Wir stellen nun keine einschränkenden Bedingungen mehr an $\varrho(M)$, $\sigma(M)$ und $\tau(M)$.

Leider erweist sich die formale Definition anschaulich klarer Sachverhalte einmal mehr als recht aufwendig.

<u>Definition 4.4.3.</u> Sei ef M, $M_x \in \{M_1, \ldots, M_k\}$. Sei $k = \varrho\sigma\tau$ eine b e l i e b i g e Zerlegung.
Wir unterteilen das $k \times k$ - Feld analog zum Beispiel 4.4.2. a) in $\frac{k}{\tau} \times \frac{k}{\tau}$ - Felder $F_{i',j'}$, $(i',j' \in \{1,\ldots,\tau\})$.
Wir definieren $M_x/_\tau$ als die $\tau \times \tau$- Matrix

$$m_{i',j'}(M_x/_\tau) := \begin{cases} 0, & \text{falls } M_x \restriction F_{i',j'} = (0) \\ 1, & \text{sonst,} \end{cases}$$

die <u>Vergröberung von M_x bei τ- Rasterung</u>.

Sei für $i',j' \in \{1,\dots,\tau\}$

$$M_{x,i'j'} := M_x \restriction F_{i'j'} .$$

Sei $M_{x,i'j'}/_\sigma$ die analog zu $M_x/_\tau$ definierte

Vergröberung von $M_{x,i'j'}$ bei σ-Rasterung.

Sei schließlich

$$M_{x,i'j',i''j''} := M_{x,i'j'} \restriction F_{i''j''} ,$$

wobei $F_{i''j''}$ das (i'',j'')-te Unterfeld bei Unterteilung des $\frac{k}{\tau} \times \frac{k}{\tau}$ - Feldes in $\varrho \times \varrho$-Unterfelder ist $(i'',j'' \in \{1,\dots,\sigma\})$.

Mit diesen Bezeichnungen formulieren wir nun eine 'schöne' hinreichende Bedingung für Edenfreiheit:

Lemma 4.4.4. Sei $(M_1,\dots,M_k)$ ein Zellularraum. Sei $k = \varrho\sigma\tau$ eine beliebige Zerlegung von k. Es mögen die folgenden Bedingungen gelten:

1) ex. $L \in [\tilde{M}]$: $\varrho(L) \leq \varrho$

2) $\forall x \in \{1,\dots,k\}$: $M_x/_\tau$ ist Zeilenmatrix

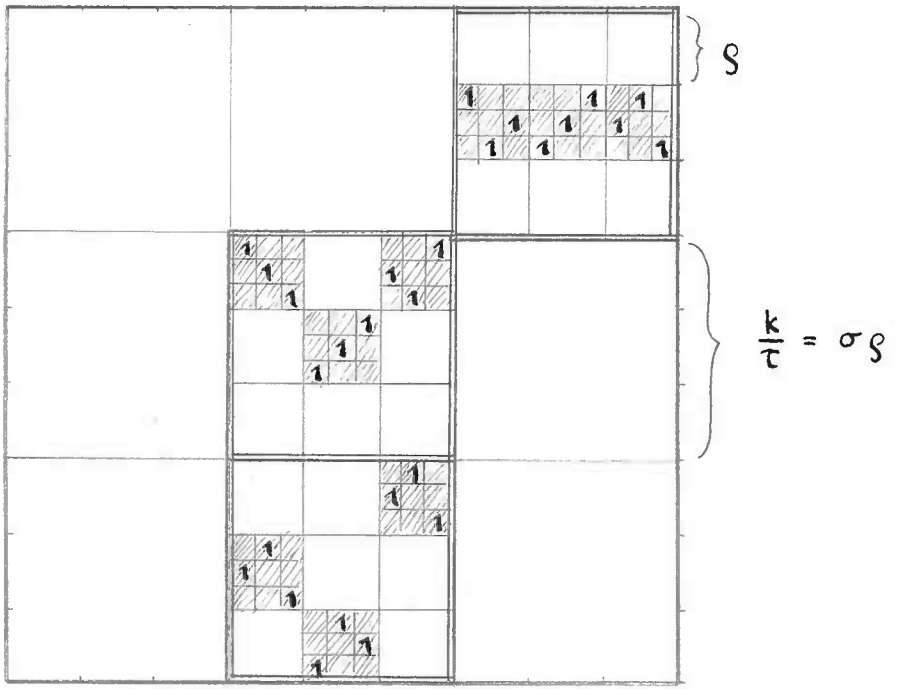
3) $\left.\begin{array}{l}\forall x \in \{1,\dots,k\} \\ \forall i',j' \in \{1,\dots,\tau\}\end{array}\right\}$: $M_{x,i'j'}/_\sigma$ ist Spaltenmatrix oder Nullmatrix

4) $\left.\begin{array}{l}\forall x \in \{1,\dots,k\} \\ \forall i',j' \in \{1,\dots,\tau\} \\ \forall i'',j'' \in \{1,\dots,\sigma\}\end{array}\right\}$: $M_{x,i'j',i''j''}$ ist Permutations- oder Nullmatrix.

Dann ist $\varrho = \varrho(M)$, $\sigma = \sigma(M)$ und $\tau = \tau(M)$.

Beweis: Auch hier dürfte genügen, sich die Bedeutung von 2) bis 4) klar vor Augen zu führen. Dazu betrachten wir ein Beispiel: sei etwa $\varrho = \sigma = \tau = 3$. Wir geben ein M_x an, das 2) bis 4) erfüllt. 2) heißt, daß 'bei nur $\tau \times \tau$ viele Grobfelder auflösender Optik' M_x wie eine Zeilenmatrix aussieht. Das ist in der untenstehenden Zeichnung durch die

doppelte Umrandung ▣ der von (O) verschiedenen 'Grobfelder' dargestellt. Entsprechend heißen 3) und 4), daß bei zunehmend 'höherer Auflösung' erst Spalten- und schließlich Permutationsmatrizen erscheinen. Erstere sind durch Schraffur der von (O) verschiedenen 'Mittelfeinfelder' kenntlich gemacht.



Wie man sich ohne Schwierigkeiten überzeugt, erhält die Matrizenmultiplikation 2) bis 4). Bedingung 1) sichert, daß eine einfache Idempotenz I mit minimalem Rang $\varrho(I) \leq \varrho$ in $\overline{M}$ vorkommt. 2) bis 4) sichern, daß $\varrho(I) \geq \varrho$ ist; und $\sigma(I) = \sigma$, $\tau(I) = \tau$, falls $\varrho(I) = \varrho$.
Also ist $k = \varrho\sigma\tau$ die charakteristische Zerlegung von k. □

Daß die eben aufgetretene Reihenfolge 'grob-mittel-fein' der Reihenfolge τ-σ-ϱ entsprach, ist natürlich durch die willkürliche Festlegung der Gestalt der Normalform für Idempotenzen bedingt. Anderen Normalformen entsprächen andere Reihenfolgen.

Lemma 4.4.4 legt nahe, ϱ, σ und τ anschaulich als Maße dafür zu interpretieren, zu welchem Anteil sich M wie der Permutations-, Spalten- und Zeilentyp verhält, wie er uns bei den Zellularräumen von Primzahlordnung begegnet ist.

Es lassen sich nun auch leicht Beispiele von Zellularräumen mit vorgegebenen charakteristischen Zerlegungen konstruieren, indem man sich bei der Angabe der M_x an die Bedingungen 2) bis 4) des vorangegangenen Lemmas hält. Die Bedingung 1) erfüllt man am einfachsten dadurch, daß man schon unter den M_x eine Matrix vom Rang ϱ bereitstellt. So ist zum Beispiel auch die Übergangsmatrix der Abbildung 2 (p.16) entstanden. Dort ist $\varrho = 1$, $\sigma = 2$ und $\tau = 3$.

4.5. Einige technische Bemerkungen

Wir schließen unseren Ausflug in das Reich edenfreier Zellularräume mit einigen Aussagen, die bei dessen weiterer Erkundung hilfreich sein könnten. Sie legen Zeugnis davon ab, daß edenfreie Zellularräume auch für nichtprimes k starke Regelmäßigkeiten aufweisen. Leider ist ein gewisser Aufwand an neuen Bezeichnungen unumgänglich.

Definition 4.5.1. Ist ef M und ist $I \in [\overline{M}]$ eine einfache Idempotenz minimalen Ranges in Normalform, so heißt I die charakteristische Idempotenz von M, und M heißt normal.

Definition 4.5.2. Sei $k = \varrho\sigma\tau$ eine Zerlegung von k. Wir belegen im $k \times k$ - Feld folgende Gebiete mit besonderen, im folgenden durchgehaltenen Namen:

$$G_1 := \{(i,j) \mid i \leq \frac{k}{\tau}\}$$

$$G_2 := \{(i,j) \mid (a-1)\frac{k}{\tau} < j \leq (a-1)\frac{k}{\tau} + \varrho\,, \quad a \in \{1,\ldots,\tau\}\}$$

$$G_3 := G_1 \cap G_2.$$

Wir zerlegen weiterhin G_1 in σ Gebiete $G_{11},\ldots,G_{1\sigma}$ ('Grobzeilen'):

$$G_{1v} := \{(i,j) \mid (v-1)\varrho < i \leq v\varrho\}\,, \quad v = 1,\ldots,\sigma.$$

Ebenso sei für $w \in \{1,\ldots,\tau\}$ G_{2w} die 'Grobspalte'

$$G_{2w} := \{(i,j) \mid (w-1)\frac{k}{\tau} < j \leq (w-1)\frac{k}{\tau} + \varrho\}, \quad w = 1,\ldots,\tau\,.$$

Schließlich zerlegen wir G_3 noch in $\varrho\times\varrho$-Felder G_{3vw}:

$$G_{3vw} := G_{1v} \cap G_{2w}.$$

Zur Veranschaulichung dieser Gebiete siehe Abbildung 5.

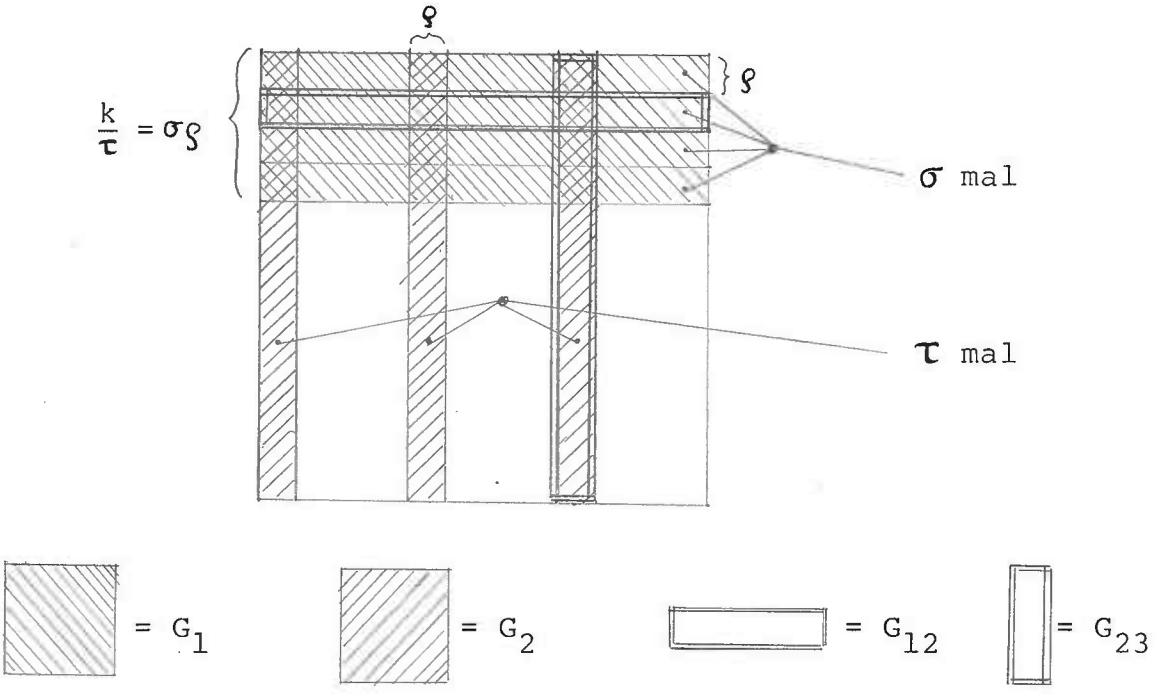


Abbildung 5. Veranschaulichung der Gebiete aus Def. 4.5.2. Im hier gezeichneten Beispiel ist $\sigma = 4$, $\tau = 3$.

Sei nun A eine $k \times k$ - Matrix. Wir bezeichnen mit $\Sigma_1 A$, $\Sigma_2 A$ und $\Sigma_3 A$ die folgenden Matrizen:

$$\Sigma_1 A := \sum_{v=1}^{\sigma} A \restriction G_{1v} \qquad \text{(eine } \varrho \times k \text{ - Matrix)},$$

$$\Sigma_2 A := \sum_{w=1}^{\tau} A \restriction G_{2w} \qquad \text{(eine } k \times \varrho \text{ - Matrix), und}$$

$$\Sigma_3 A := \sum_{\substack{v \in \{1,\ldots,\sigma\} \\ w \in \{1,\ldots,\tau\}}} A \restriction G_{3vw} \qquad \text{(eine } \varrho \times \varrho \text{ - Matrix).}$$

Mit diesen Bezeichungen formulieren wir nun

Lemma 4.5.3. Ist M ein normaler ZR, $k = \varrho\sigma\tau$ die charakteristische Zerlegung, $L \in [\overline{M}]$, so gilt

a) $\Sigma_1 L$ ist $\{0,1\}$ - Matrix vom Rang ϱ mit $\varrho\sigma$ Einsen;

b) $\Sigma_2 L$ ist $\{0,1\}$ - Matrix vom Rang ϱ mit $\varrho\tau$ Einsen;

c) $\Sigma_3 L$ ist $\varrho \times \varrho$ - Permutationsmatrix.

Beweis: Sei für ein Gebiet $G \subset \{1,\ldots,k\} \times \{1,\ldots,k\}$

$$G^t := \{(i,j) \mid (j,i) \in G\}$$

$$G^c := \{(i,j) \mid (i,j) \notin G\}.$$

zu a): Sei I die charakteristische Idempotenz von M. Wir betrachten IL. Es ist

$$(IL) \restriction (G_2^t)^c \equiv 0 \quad \text{und}$$

$$\forall w \in \{1,\ldots,\tau\}: \quad (IL) \restriction (G_{2w})^t = \Sigma_1 L. \qquad \square$$

IL weist also τ mit $\Sigma_1 L$ identische 'Grobzeilen' auf und ist ansonsten Null. Daraus folgt schon a).

b) und c): analog; wir betrachten LI bzw. ILI.

Korollar 4.5.4. Mit den Voraussetzungen des vorangegangenen Lemmas gilt:

$$\mathfrak{G} := \{\Sigma_3 L \mid L \in [\overline{M}]\}$$

ist eine Gruppe von Permutationsmatrizen.

Beweis: Sei G_4 die 'linke obere $\varrho \times \varrho$ - Ecke im $k \times k$-Feld', etwa präzisiert durch $G_4 := G_{11} \cap G_{21}$.
Man überzeugt sich geraden Weges, daß für $L \in [\overline{M}]$ gilt

$$\Sigma_3 L = (ILI) \restriction G_4 .$$

Daraus folgt

$$\mathcal{Y} = \{ (ILI) \restriction G_4 \mid L \in [\overline{M}] \}$$
$$= \{ L \restriction G_4 \mid L \in [\overline{M}],\ L \restriction G_4 \text{ ist Permutationsmatrix} \} .$$

Für zwei $L_1, L_2 \in [\overline{M}]$ mit Permutationsmatrizen $L_1 \restriction G_4$, $L_2 \restriction G_4$ ist aber wegen Teil c) des Lemmas 4.5.3

$$(L_1 L_2) \restriction G_4 = (L_1 \restriction G_4)(L_2 \restriction G_4),$$

d.h. $\mathcal{Y}$ ist gegen Produktbildung abgeschlossen.
Eine endliche, gegen Produktbildung abgeschlossene Menge von Permutationsmatrizen ist aber eine Gruppe. □

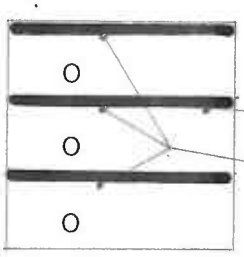
In einigen der Beweise dieser Arbeit hat die Darstellung

$$\sum_{x=1}^{k} M_x = (1)$$

eine wichtige Rolle gespielt. Ein Pendant hierzu liefert das folgende Lemma. Es könnte helfen, die Struktur der Sonderfälle $\varrho = 1$ bzw. $\sigma = 1$ oder $\tau = 1$ zu entschlüsseln. Es bietet außerdem zum Abschluß dieser Arbeit noch einmal eine 'schöne' Aussage!

Lemma 4.5.5. Sei M ein normaler ZR, $k = \varrho\sigma\tau$ die charakteristische Zerlegung.
a1) ist $\varrho = 1$, so gibt es eine Darstellung

$$N := \sum_{x=1}^{k} L_x = \quad (L_x \in [\overline{M}])$$

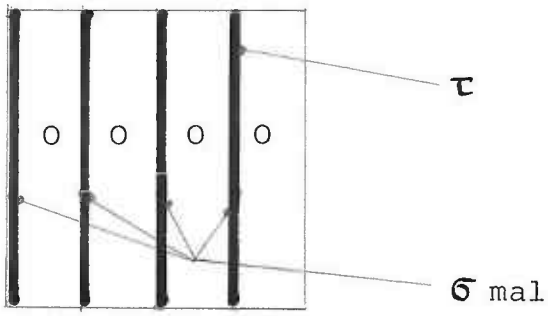


wobei N präziser ausgedrückt definiert ist durch

$$m_{ij}(N) := \begin{cases} \sigma, & \text{falls } i \equiv 1 \pmod{\sigma} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a2) Dual hierzu: ist $\varrho = 1$, so gibt es in einer geeigneten Transformierten P^tMP von M eine Darstellung

$$N := \sum_{x=1}^{k} L_x =$$



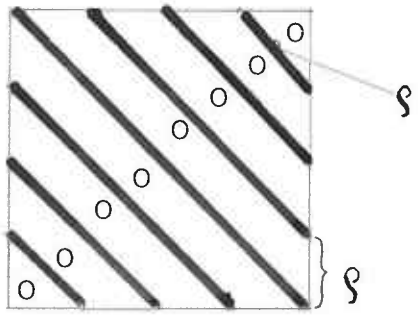
$$(L_x \in \overline{[P^tMP]})$$

wobei präziser:

$$m_{ij}(N) := \begin{cases} \tau, & \text{falls } j \equiv 1 \pmod{\tau} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Ist $\sigma = 1$ oder $\tau = 1$, so gibt es eine Darstellung

$$N := \sum_{x=1}^{k} L_x =$$



$$(L_x \in [\overline{M}])$$

wobei präziser:

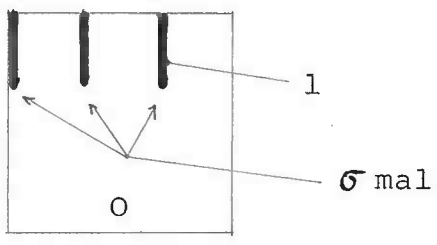
$$m_{ij}(N) := \begin{cases} \varrho, & \text{falls } i \equiv j \pmod{\varrho} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis: Sei I die charakteristische Idempotenz in $[\overline{M}]$.

zu a1): Wähle $L_x = IM_x$ $(x = 1,\ldots,k)$

zu a2): Wir wählen eine Transformation P^tMP, so daß I folgende 'permutierte Normalform' annimmt:

$P^tIP =$



wobei präziser:

$$m_{ij}(P^tIP) = \begin{cases} 1, \text{ falls } j \equiv 1 \pmod{\tau} \text{ und } i \leq \tau \\ 0, \text{ sonst.} \end{cases}$$

Wähle dann $L_x = P^tM_xIP$ $(x = 1,\ldots,k)$.

zu b): Wir behandeln den Fall $\tau = 1$.
Hier degeneriert G_2 zu einer einzigen 'Grobspalte'

$$G_2 = G_{21} = G_3 = \{(i,j) \mid j \leq \varrho\}.$$

Sei wie im Beweis zu Korollar 4.5.4 G_4 die linke obere $\varrho\times\varrho$-Ecke im $k \times k$ - Feld. Für $L \in [\overline{M}]$ ist $IL\restriction G_4 = \Sigma_3 L$.
Wir definieren für $L \in [\overline{M}]$ zwei Vektoren:

(i) einen $\{0,1\}$ - Vektor $\zeta(L) = (\zeta_1(L),\ldots,\zeta_k(L))$ der Länge k durch:
$\zeta_i(L) = 1$ gdw $\exists j \leq \varrho : m_{ij}(L) = 1$; und

(ii) einen $\{1,\ldots,\varrho\}$ - Vektor $\sigma(L) = (\sigma_1(L),\ldots,\sigma_\varrho(L))$ der Länge ϱ durch:
$\sigma_j(L) = i$ gdw $\exists i' : m_{i'j}(L) = 1$ und $i' \equiv i \pmod{\varrho}$.

$\zeta(L)$ ist also anschaulich die Projektion der ersten Grobspalte auf ihre Längsseite, und $\sigma(L)$ die 'mod ϱ - Projektion' der ersten Grobspalte auf ihre Basis.
Sei $\mathcal{G}$ die aus dem Korollar 4.5.4. bekannte Gruppe.
Sei zu $L \in [\overline{M}]$ eine Matrix $L' \in [\overline{M}]$ ausgewählt mit

$$\Sigma_3 L = (\Sigma_3 L')^{-1} .$$

Aus Lemma 4.5.3 c) folgt:

$$\forall L \in [\overline{M}]: \ \sigma(L) \text{ ist eine Permutation von } (1,2,\ldots,\varrho).$$

Wir nennen diese Permutation π_L:

$$\pi_L : (1,2,\ldots,\varrho) \mapsto \sigma(L).$$

Für L' gilt

$$(\pi_L)^{-1} = \pi_{L'} .$$

Man überzeugt sich ohne größere Mühe von

$$(*) \quad \forall L_1, L_2 \in [\overline{M}]: \ \pi_{L_1IL_2} = \pi_{L_2} \circ \pi_{L_1} \quad \text{und}$$
$$(**) \quad \forall L_1, L_2 \in [\overline{M}]: \ \zeta(L_1IL_2) = \zeta(L_1).$$

Nun sei $M_x \in \{M_1,\ldots,M_k\}$. Wir betrachten $M_x IM'_x$. Mit $(*)$ und $(**)$ folgt

$$\mathfrak{z}(M_x IM'_x) = \mathfrak{z}(M_x) \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{z}^{\wedge}(M_x IM'_x) = (1,2,\ldots,\rho).$$

Daraus ergibt sich sogleich

$$\sum_{x=1}^{k} (M_x IM'_x)\restriction G_3 = N\restriction G_3 \text{ , und hieraus}$$

$$N = (\sum_{x=1}^{k} (M_x IM'_x))I = \sum_{x=1}^{k} M_x IM'_x I$$

als eine Darstellung vom gewünschten Typ. □

ACHTUNG FALLE!

Im folgenden fünften Abschnitt habe ich den Begriff der O b s e r v a b l e n falsch verwendet. Ich habe inzwischen gelernt, daß er in der Physik für M e ß g r ö ß e n wie Impuls, Energie, Ort etc. steht. Ich hatte dagegen angenommen, daß er für den T r ä g e r solcher Meßgrößen stehe: für Teilchen, Wellen, Ensembles etc. (wobei die Trennung in Träger und Meßgröße sicher bei genauerer Betrachtung voller Schwierigkeiten steckt). Was an meiner Schludrigkeit verzeihlich erscheint, das möge man mir bitte verzeihen.

Statt "Observable" ist im folgenden besser z.B. der Ausdruck "Entität" zu lesen, der eben ein logisches Substrat, einen begrifflich aus dem zeitlichen Ablauf der Wirklichkeit herauszulösenden Träger von Eigenschaften bedeuten soll. Beispiele dafür wären Teilchen aller Art, Organismen, Ökosysteme, Galaxien; aber auch Träume, Gesellschaftssysteme, Tennismatche oder die Regeln des Tennisspiels ... kurz, wohl so ungefähr alles, was als Stichwort in der Encyclopædia Britannica auftauchen könnte!

(Nachtrag August '87)

5. Schlußbemerkung

Ich kann mir vorstellen, daß sich die Struktur edenfreier Zellularräume im eindimensionalen Fall vollständig aufklären läßt, und daß sich in höheren Dimensionen überraschend starke Gesetzmäßigkeiten finden werden. Die wirklich reizvollen Fragen können aber nicht Zellularräume als solche betreffen. Diese sind Werkzeug, Konstruktionsmaterial, um dem Nachdenken Gerüste bereitzustellen. 'Wirklich reizvolle' Fragen wären z.B. die nach dem Wesen der Selbstorganisation, die ich schon in der Einleitung beschrieben habe. Einige andere möchte ich nun zum Abschluß noch in leider sehr starker Zusammendrängung andeuten.

Wenn man Zellularräume als 'imaginäre Wirklichkeiten' auffaßt, dann ist die lokale Übergangsfunktion f_o darin eine Inobservable. 'Interessante' f_o sind nach meinen Erfahrungen irreversibel. Die klassischen physikalischen Gesetze aber zielen stets auf Zusammenhänge zwischen Observablen und sind zeitlich reversibel. Liegt darin etwa nicht nur kein Widerspruch, sondern die Chance, den Begriff der 'Observablen' gerade durch ihre zeitliche Reversibilität zu definieren? Diese Idee möchte ich noch mit einigen Sätzen deutlicher machen. Physikalische Beobachtungen setzen eine sei es noch so kurze zeitliche Dauer des Beobachteten voraus. Das Beobachtete muß während dieser Dauer seine begriffliche Einheit wahren. Es muß in einem Beobachtungsmoment auf irgend eine Weise als 'dasselbe' angesprochen werden können wie im Moment zuvor oder danach. Nichts anderes als solche 'Konstanz der Kategorie' ist aber in einem allgemeinen Sinne Reversibilität. - Überdies eröffnet die Zurückversetzung der 'wirkenden Gesetze', der 'Übergangsfunktion' ins Reich des Inobservablen die Möglichkeit, zu einem ungezwungenen Verständnis vom 'Pfeil der Zeit' zu kommen. Dieser verliert alles Rätselhafte, wenn man irreversible 'Wirkgesetze' annimmt. Die klassischen Gesetze erscheinen in diesem Licht plötzlich als prinzipiell sehr weit von der wirkenden Fundamentalebene entfernte Abstraktionen, - als abhängige R e g e l m ä ß i g k e i t e n , nicht mehr als determinierende R e g e l n. Dieser kategoriale Unterschied zwischen Regel, Gesetz und Regelmäßigkeit, Gesetzhaftigkeit wird auch noch durch zwei andere Unterscheidungsmerkmale schlaglichtartig erhellt. Erstens ist die Zeitlichkeit in den Formulierungen der klassischen Gesetze vorausgesetzt e n t h a l t e n, durch f_o aber wird sie recht eigentlich d e f i n i e r t . Zweitens sind wohl beliebig v i e l e klassische Gesetze

denkbar, aber nur e i n e Grundregel vom Typ f_o.

Denkt man erst einmal in solchen Bahnen, dann drängen sich weitere Fragen zuhauf. Eine davon, die sich möglicherweise besonders schön mit dem Werkzeug der Zellularräume angehen ließe, wäre die nach der 'Deduzierbarkeit' von f_o. Wie genau kann man aus durch Beobachtung induktiv gewonnenen Gesetzmäßigkeiten die Gestalt der Grundregel ableiten? Eine erste Annäherung an diesen Fragenkreis wäre wohl auch die Frage nach der Existenz universaler edenfreier Zellularräume. Im Gegensatz zur 'algorhytmischen Tradition' will ich dabei unter einem universalen edenfreien Zellularraum A einen solchen verstehen, für den zu jedem anderen edenfreien Zellularraum B ein gleichwertiger Zellularraum A' (im Sinne von Def. 2.2.2) existiert, so daß B ein Unterraum von A' ist:

$$A \text{ universal} :\Leftrightarrow \forall B\ \exists A' : A \leftrightarrow A' \text{ und } B \subset A'.$$

Für die Behandlung gerade solcher Fragen hält die mathematische Logik starke Instrumente bereit.

Probleme dieser Art präsentieren sich auf einer großen neuen Bühne mitten zwischen Naturwissenschaften, Mathematik, Philosophie und anderen Disziplinen, wo man neuerdings zusammenzukommen und seine Instrumente zu stimmen beginnt. Die neue Auseinandersetzung über begriffliche Grundfragen beim Verständnis k o m p l e x e r Systeme führt Geistes- und Naturwissenschaften vielleicht bald zu einem bislang unvorstellbaren gemeinsamen Konzert zusammen. Der Begriff des Gesetzes, welchen zumindestens unser 'westliches' Denken seit langem mit dem des klassischen, 'integrierbaren' physikalischen Gesetzes gleichgesetzt hat, tritt in eine Metamorphose ein. Jener physikalisch-klassische Begriff, der unser Denken einerseits so effizient, andererseits aber auch so staunens- und lieblos gemacht hat, wird sich, so hoffe ich mit vielen, als nichtfundamental herausstellen. Er ist ein Werkzeug, keine Wahrheit. Er ist nicht der Weisheit letzter Schluß! Das Fundamentale mag inobservabel, gar indeduzibel sein, ist aber für unsere Haltung zur Schöpfung das Entscheidende.

Wir beginnen die fundamentalen B e s c h r ä n k u n g e n des Kennen- und Beherrschenkönnens sowohl der Gegenwart als auch der Zukunft nicht länger bloß zu verdrängen, nur um immer wieder von den Folgen dieser Ignoranz überrascht zu werden; wir beginnen sie vielmehr zu begreifen und zu

akzeptieren. Der Gedanke der 'Unentscheidbarkeit der Zukunft' ist in der gegenwärtigen theoretischen Physik schon beinahe ein Gemeinplatz (vgl. z.B. CUYKENDALL 1985). Wir werden die Grenzen unseres Herrschenkönnens eines Tages als Geburtsort der Selbsterkenntnis und der Freiheit aus dem Sich-bescheiden bejahen.

Das sind große Worte am Ende einer Arbeit, die sich überwiegend mit gewissen Matrizenhalbgruppen beschäftigt. Solche ethischen Aspekte sind aber, neben den mehr erkenntnistheoretischen, die zweite Hauptmotivation für das Forschen nach jener neuen Einheit. Ich hoffe inständig, daß ich hierbei als Forschender im Glauben an die Relevanz mathematisch strengen Denkens keiner Selbsttäuschung zum Opfer falle.

Symbolverzeichnis

Die Seitenzahlen beziehen sich auf die Definitionen der betreffenden Symbole. Die im einleitenden ersten Abschnitt nur vorläufig eingeführten Symbole sind hier nicht berücksichtigt.

(S,f_o), S, f_o	18
r,k	18
S^*, $\overset{n}{S}$, $\overline{S}$	18
$\left\|\overset{n}{S}\right\|$	19
f	19
$\tilde{C},\tilde{c},C,c$	19
F	19
$ef(S,f_o)$	19
$S^{(*a)}$, $\varkappa$, f_b	21
$\leftrightarrow$	21
$m_{ij}(X)$	25
M, M_x	26
$(M_1,\ldots,M_k)$	26
(T,g_o)	28
$\|K\|$ (K Matrix)	34
$[\overline{M}]$, $(M_1,\ldots,M_k)$	35
P^tMP	37
$Z_i(L)$, $e_i(L)$	44
$\|Z\|(L)$	44
$S_j(L)$, $e_j^!(L)$	44
$\|S\|(L)$	44
$\sigma(L)$, $\tau(L)$	46
$\varrho(A)$, $\varrho(M)$	47
$\sigma(M)$, $\tau(M)$	53
$U(b,a)$	55
M_x/τ	57
$M_{x,i'j'}/\sigma$	58
$M_{x,i'j',i''j''}$	58
G_1, G_2, G_3	61
G_{1v}, G_{2w}, G_{3vw}	61
$\Sigma_1 A$, $\Sigma_2 A$, $\Sigma_3 A$	62
$\mathcal{G}$	62

Literaturverzeichnis

(1) S. Amoroso und G. Cooper: The Garden-of-Eden Theorem for Finite Configurations. Proc. Am. Math. Soc. 26 (1970), 158-164

(2) S. Amoroso und Y.N. Patt: Decision Procedures for Surjectivity and Injectivity of Parallel Maps for Tesselation Structures. J. Comp. Syst. Sci. 6 (1972), 448-464

(3) M.A. Arbib: Theories of Abstract Automata (Kapitel 10.6). Englewood Cliffs, N.J. 1969

(4) A. Berman und R.J. Plemmons: Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences. New York 1979

(5) C.H. Bennet: The Thermodynamics of Computation. Int. J. of Theor. Phys. 21 (1982), 905-940

(6) Y. Bouligand: Symmetry Principle and Morphogenetic Games (1984). In (11), 75-86

(7) L.K. Bruckner: On the Garden-of-Eden Problem for One-dimensional Cellular Automata. Acta Cybernetica 4 (1978/79), 259-261

(8) A.W. Burks: Vorwort des Herausgebers in: "John von Neumann: Theory of Self-reproducing Automata", A.W. Burks (Hrsg.). Univ. of Ill. Press, Urbana 1966

(9) A.H. Clifford und G.B. Preston: The Algebraic Theory of Semigroups I. Providence 1961

(10) R. Cuykendall: Uncontrollable Computational Growth in Theoretical Physics. Int. J. of Theor. Phys. 24 No. 12 (1985), 1143-1157

(11) J. Demongeot, E. Golès und M. Tchuente (Hrsg.): Dynamical Systems and Cellular Automata. Kongreß in Luminy (Frankreich) 1983. London 1985

(12) D. Farmer, T. Toffoli und S. Wolfram (Hrsg.): Cellular Automata. Kongreß in Los Alamos 1983. Physica 10D (1984)

(13) P. Flor: On Groups of Non-negative Matrices. Compositio Mathematica 21 Bd. 4 (1969), 376-382

(14) U. Golze: Endliche, periodische und rekursive zellulare Konfigurationen: Vorgängerberechnung und Garten-Eden-Probleme. Dissertation TU Hannover 1975

(15) P. Grassberger: Chaos and Diffusion in Deterministic Cellular Automata (1984). In (12), 52-58

(16) W.I. Grosky: On the Existence of Garden-of-Eden Configurations. Information and Control 36 (1978), 234-243

(17) D.A. Lind: Applications of Ergodic Theory and Sofic Systems to Cellular Automata (1984). In (12), 36-44

(18) N. Margolus: Physics-like Models of Computation. In (12), 81-95

(19) O. Martin, A.M. Odlysko und S. Wolfram: Algebraic Properties of Cellular Automata. Comm. Math. Phys. 93 (1984), 219-258

(20) E.F. Moore: Machine Models of Self-Reproduction. In: Proc. Symp. in Appl. Maths. XIV : Mathematical Problems in the Biological Sciences (1962). Nachgedruckt in: A.W. Burks: Essays on Cellular Automata. Univ. of Ill. Press, Urbana 1970

(21) J. Myhill: The Converse to Moore's Garden-of-Eden Theorem. Proc. Am. Math. Soc. 14 (1963), 685-686

(22) J. Myhill: The Converse to Moore's Garden-of-Eden Theorem. Veränderte Version. In: A.W. Burks: Essays on Cellular Automata. Univ. of Ill. Press, Urbana 1970

(23) J. von Neumann: Theory and Organization of Complicated Automata (1949). In (8)

(24) J. von Neumann: The General and Logical Theory of Automata (1951). In: Collected Works V, 288-328

(25) J. von Neumann: The Theory of Automata: Construction, Reproduction, Homogeneity (1952). In (8)

(26) N.H. Packard: Complexity of Growing Patterns in Cellular Automata. In (11), 123-137

(27) J.K. Park, K. Steiglitz und W.P. Thurston: Soliton-like Behavior in Automata. Physica 19 D (1986), 423-432

(28) S. Skyum: Confusion in the Garden of Eden. Proc. Am. Math. Soc. 50 (1975), 332-336

(29) T. Toffoli: Cellular Automata as an Alternative to (rather than an Approximation of) Differential Equations in Modelling Physics (1984). In (12), 117-127

(30) G.Y. Vichniac: Simulating Physics with Cellular Automata (1984). In (12), 96-116

(31) R. Vollmar: Algorithmen in Zellularautomaten. Stuttgart 1979

(32) I. Wachsmuth: Zellularräume und Garten-Eden-Konfigurationen. Diplomarbeit TU Hannover 1974

(33) W.J. Wilbur, D.J. Lipman und S.A. Shamma: On the Prediction of Local Patterns in Cellular Automata. Physica 19 D (1986), 397-410

(34) S. Wolfram: Statistical Mechanics of Cellular Automata. Rev. Mod. Phys. 55 (1983), 601-643

(35) S. Wolfram: Computation Theory of Cellular Automata (1984a). Comm. Math. Phys. 96 (1984), 15-57

(36) S. Wolfram: Vorwort des Herausgebers in (12) (1984b)

(37) S. Wolfram: Universality and Complexity in Cellular Automata (1984c). In (12), 1-35

(38) H. Yamada und S. Amoroso: Structural and Behavioral Equivalences of Tesselation Automata. Information and Control 18 (1971), 1-31

Herbert Jaeger
Häge 16
7800 Freiburg

Errata und sich aufdrängende Verbesserungen

p.24 Der Beweis von 2.2.5. wird einfacher und übersichtlicher, wenn wir ohne den Umweg über Konfigurationen gleich $g(s_i) := f_o(s_i,\ldots,s_i)$ setzen.

p.45 drittletzte Zeile: falsch "n", richtig "k".

p.54 Der Beweis von Lemma 4.3.2, Richtung "$\Rightarrow$", ist bei genauerem Hinsehen schon in seiner zweiten Zeile beendet. Man überlegt sich leicht, daß schon I_oL_o keine $\{0,1\}$ - Matrix ist.

p.57 In Def. 4.4.3 ist die Voraussetzung "ef M" zu streichen.

p.68 Zeile 12 enthält einen Schreibfehler, den man nicht mehr als Tippfehler verniedlichen kann. Er ist mit der Farbe schamrot zu korrigieren!!

p.26 dritte Zeile: Die hier angegebene Definition von M erzeugt eine Matrix, deren Einträge Elemente aus der Symbolmenge $\{s_1,\ldots,s_k\}$ sind. Im weiteren Verlauf wird aber mit M so gerechnet, als ob die Einträge nicht die Symbole s_i, sondern deren Indizes i seien. Deswegen sollte diese Definition zu

$$M(i,j) = l \quad :\text{gdw} \quad f_o(s_i,s_j) = s_l$$

modifiziert werden. Entsprechend müßte die Definition von M_x einige Zeilen später abgeändert werden.