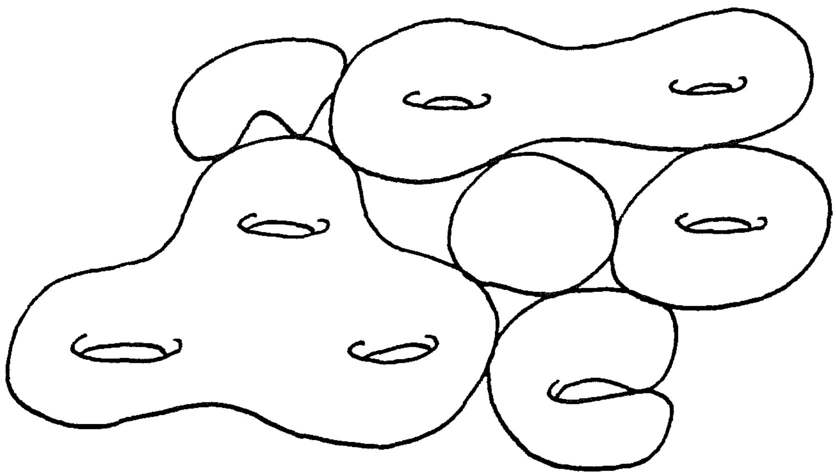
ENIGE AANTEKENINGEN ROND MODULIRUIMTEN VAN KROMMEN EN HUN INTERSECTIETHEORIE

Bart Verkeij



Faculteit Wiskunde en Informatica - Universiteit van Amsterdam

ENIGE AANTEKENINGEN

ROND

MODULIRUIMTEN VAN KROMMEN

EN

HUN INTERSECTIETHEORIE

Bart Verkeij

zomer 1991

Inhoud

blz 1	1	Krommen
5	2.	Moduli van krommen
5	2.1	Inleiding
6	2.2	Families van krommen
9	2.3	Het Hilbertschema en de moduliruimte
13	2.4	Enige feiten over de moduliruimte M_g
14	3.	Intersectietheorie op moduliruimten van krommen
14	3.1.	Inleiding
16	3.2	De moduliruimten van gepuncteerde krommen
18	3.3	De beschouwde cohomologieklassen
26	3.4	Het vermoeden van Witten
33		Literatuur

Opmerking vooraf: voor zover niet gedefinieerd zijn notaties min of meer standaard. Zie bijvoorbeeld [Hart].

1 KROMMEN

Wat zijn de krommen die ter sprake komen?

(1.1) <u>Definitie</u> Een <u>gladde kromme</u> is een complete, irreducibele, gereduceerde, niet-singuliere kromme, gedefinieerd over $\mathbb{C}$. Anders gezegd, het is een compact Riemann-oppervlak.

(1.2) <u>Definitie</u> Een <u>(stabiele) kromme</u> is een samenhangende, gereduceerde, complete kromme, gedefinieerd over $\mathbb{C}$, niet-singulier op gewone dubbelpunten na, zodat bovendien elke niet-singuliere rationale irreducibele component de andere componenten in tenminste 3 punten treft. Ook een gladde rationale kromme en een vlakke kromme van graad 3 met een knoop (als ontaarde elliptische kromme) noemen we stabiel.

(1.3) <u>Definitie</u> Het (arithmetisch) geslacht van een stabiele kromme C is gedefinieerd als:

$$p_a(C) := \dim_{\mathbb{C}} H^1(C, \mathcal{O}_C).$$

Wegens Serre-dualiteit is het arithmetisch geslacht van een gladde kromme C gelijk aan het meetkundig geslacht $g(C)$, gedefinieerd als $g(C) := \dim_{\mathbb{C}} H^0(C, \Omega_C)$.

Laat nu C een stabiele kromme zijn, $C_1, \ldots, C_t$ de irreducibele componenten, $\tilde{C} = \cup \tilde{C}_i \xrightarrow{f} \cup C_i = C$ de normalisatie van C, g_i het meetkundig geslacht van $\tilde{C}_i$, δ het aantal knopen van C_i. Dan hebben we het volgende verband.

(1.4) Lemma $\quad p_a(C) = \sum_{i=1}^{t} g_i + \delta - t + 1$.

Bewijs: We hebben een exact rijtje van schoven

$$0 \to \mathcal{O}_C \to f_* \mathcal{O}_{\tilde{C}} \to \sum_{p \in C} \mathcal{O}_{\tilde{C},p} / \mathcal{O}_{C,p} \to 0$$

waarbij $\mathcal{O}_{\tilde{C},p}$ de gehele afsluiting is van de lokale ring $\mathcal{O}_{C,p}$. We vinden zo een exacte rij:

$$0 \to H^0(\mathcal{O}_C) \to H^0(f_* \mathcal{O}_{\tilde{C}}) \to H^0(\Sigma \mathcal{O}_{\tilde{C},p} / \mathcal{O}_{C,p})$$
$$\to H^1(\mathcal{O}) \to H^1(f_* \mathcal{O}_{\tilde{C}}) \to H^1(\Sigma \mathcal{O}_{\tilde{C},p} / \mathcal{O}_{C,p})$$

De laatste term van deze rij is nul en bovendien geldt $H^i(f_* \mathcal{O}_{\tilde{C}}) \simeq H^i(\mathcal{O}_{\tilde{C}})$, $i = 0,1$ [Hart III 2.7 & ex 4.1]

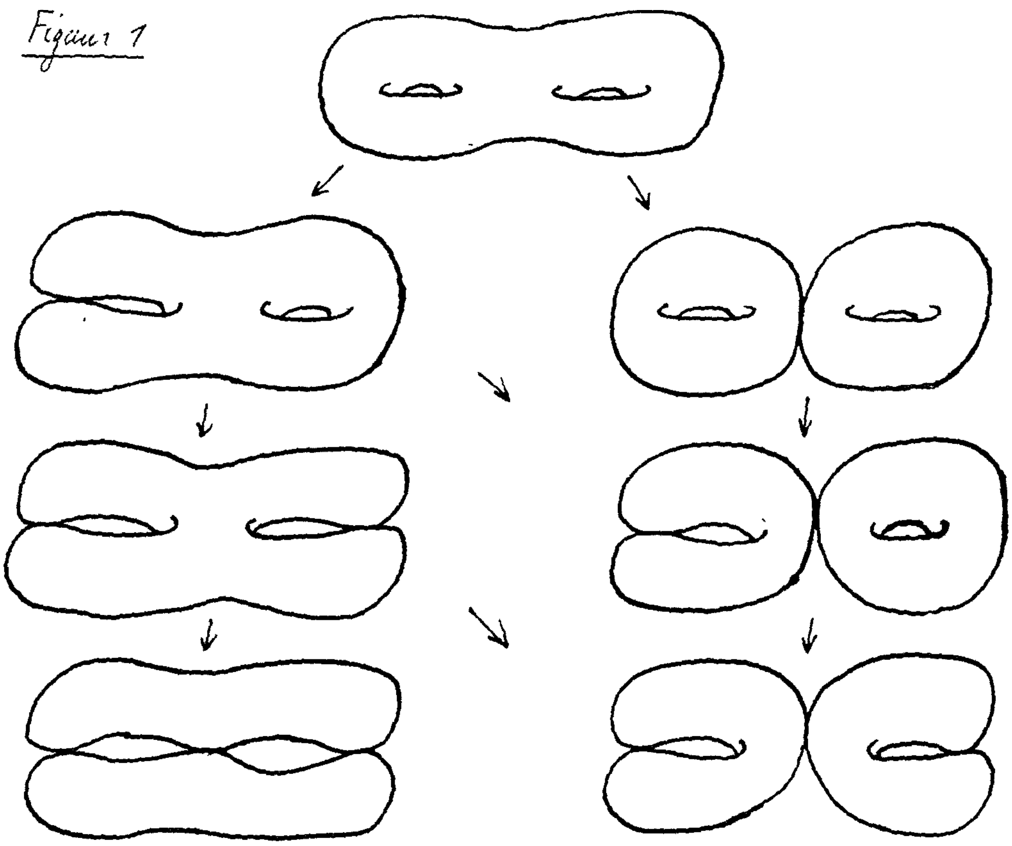
Nemen we nu de alternerende som van de dimensies van deze complexe vectorruimten dan vinden we:

$$-1 + t - \delta + p_a(C) - \sum_{i=1}^{t} g_i = 0$$

QED.

(1.5) <u>Voorbeeld</u> In figuur 1 zijn de topologische typen van de stabiele krommen van geslacht 2 afgebeeld. De pijlen geven aan welke typen ontstaan door een extra knoop.

<u>Figuur 1</u>



(1.6) <u>Opmerking</u> Een projectieve kromme beschouwen we meestal als abstracte kromme, dat wil zeggen onafhankelijk van een inbedding in een projectieve ruimte. Zie later het verschil tussen het Hilbertschema en de moduliruimte.

Stabiele krommen zijn projectief, zie bijvoorbeeld [Hart III ex 5 8]

Een belangrijk feit over stabiele krommen is het volgende:

(1.7) <u>Lemma</u> Samenhangende, gereduceerde complete krommen gedefinieerd over $\mathbb{C}$ met alleen gewone dubbelpunten (van geslacht ≥ 2) zijn juist stabiel als ze eindige automorfismengroep hebben.

Bewijs: gladde krommen van geslacht $g \geq 2$ hebben eindige automorfismengroep van orde $\leq 84(g-1)$ [Hart IV ex 2.5] en gladde rationale respectievelijk elliptische krommen hebben eindig veel automorfismen juist als 3 respectievelijk 1 punten en hun beeld zijn voorgeschreven. Omdat elk automorfisme van een stabiele kromme de samenhangs-componenten en de knopen permuteert, volgt het lemma een gladde rationale component bevat ≥ 3 knopen per definitie en een gladde elliptische component ≥ 1 vanwege de samenhang. QED.

2. MODULI VAN KROMMEN

2.1 Inleiding

Het idee is eenvoudig. Kunnen we de verzameling isomorfie-klassen van gladde krommen M_g op een natuurlijke manier de structuur van een variëteit $\mathcal{M}_g$ geven?

(2.1) Voorbeeld M_0 bestaat uit één element, de isomorfie-klasse van $\mathbb{P}^1$, dus hebben we een bijectie $M_0 \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^0(\mathbb{C})$.

(2.2) Voorbeeld De j-invariant van elliptische krommen levert een bijectie $M_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^1(\mathbb{C})$.

Een eerste stap in de richting van zulke parametriserende ruimten van krommen van algemeen geslacht, is het begrip familie van krommen.

2.2 <u>Families van krommen</u>

Zoals als we projectieve variëteiten beschouwen, is het een natuurlijke stap om families van variëteiten te bekijken: we kunnen de coëfficiënten van de definiërende vergelijkingen laten variëren. Om nu in een algemene algebraische context een begrip familie te definiëren, beginnen we de vezels van een morfisme $X \to S$ te beschouwen als een familie variëteiten geparametriseerd door S. We willen natuurlijk speciale families beschouwen, waarvan de vezels als variëteiten bepaalde invarianten gemeen hebben

Een goed begrip is de <u>platte familie</u> (zie [Hart III 9])

(2.3) <u>Definitie</u> Laat A een ring zijn en M een A-moduul. M heet <u>plat</u> als de functor $N \mapsto M \otimes_A N$ exact is voor elk A-moduul N

Een morfisme $X \xrightarrow{f} Y$ van schema's heet <u>plat</u> als voor elke $x \in X$ de staak $\mathcal{O}_{x,X}$ een plat $\mathcal{O}_{f(x),Y}$-moduul is, via de natuurlijke afbeelding $f^{\#} : \mathcal{O}_{f(x),Y} \to \mathcal{O}_{x,X}$.

Deze ondoorzichtige definitie heeft in projectieve context een meetkundige betekenis :

(2.4) <u>Stelling</u> [Hart III 9.9] Laat T een integraal noethers schema zijn, $X \subset \mathbb{P}^r_T$ een gesloten deelschema. Beschouw voor elk punt $t \in T$ het Hilbertpolynoom $P(t) \in \mathbb{Q}[z]$ van de vezel X_t beschouwd als gesloten deelschema van $\mathbb{P}^r_{k(t)}$. Dan geldt:

X is plat over T $\iff$ $P(t)$ is onafhankelijk van t.

Hierbij is het <u>Hilbertpolynoom</u> $P_X(z)$ van een varieteit $X \subset \mathbb{P}^N$ het unieke polynoom in $\mathbb{Q}[z]$ met de eigenschap

$$P_X(n) = \dim_{\mathbb{C}} S_n \qquad \text{voor } n \text{ voldoende groot}$$

waarbij $S = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_n$ de gegradeerde coördinatenring van X is. Voor een kromme $C \subset \mathbb{P}^2$ is het Hilbertpolynoom

$$P_C(z) = dz - p_a(C) + 1$$

waarbij d de graad is van $C \subset \mathbb{P}^N$

Het zou mooi zijn als er een universele familie van gladde krommen zou bestaan, wat zou betekenen:
er is een platte familie van krommen van geslacht g $\begin{array}{c}\mathcal{X}_g\\ \downarrow\\ \mathfrak{M}_g\end{array}$
zodat voor elke platte familie van krommen van geslacht g $\begin{array}{c}X\\ \downarrow\\ T\end{array}$
er een uniek morfisme $T \to \mathfrak{M}_g$ is, zodat X teruggehaalde is van $\mathcal{X}$ in het diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ T & \longrightarrow & \mathfrak{M}_g \end{array}.$$

(2.5) <u>Opmerking</u> Dit zou betekenen dat $\mathfrak{M}_g$ de functor

$$T \longmapsto \left\{ \begin{array}{c}X\\ \downarrow\\ T\end{array} \text{ platte families gladde krommen van geslacht } g \right\}$$

zou representeren.

Zo'n familie bestaat echter niet. Door echter de 'familie' $C \to \{C\}$ te bekijken, zien we dat als zo'n universele familie zou bestaan, de basisruimte $\mathfrak{M}_g$ als verzameling juist M_g is, de verzameling isomorfieklassen van gladde krommen

Mumford [M-GIT] laat zien dat er wel een variëteitsstructuur $\mathfrak{M}_g$ op M_g bestaat, bepaald door de volgende eigenschap: voor elke platte familie van krommen van geslacht g $\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ T \end{array}$ is de afbeelding $T \to \mathfrak{M}_g$ gegeven door $t \in T$ te sturen naar de isomorfieklasse van de vezel X_t een morfisme.

De constructie verloopt via het zogenaamde Hilbertschema van projectieve varieteiten

2.3 Het Hilbertschema en de moduliruimte

Het Hilbertschema $\mathcal{H}_{d,p_a,r}$ parametriseert gesloten deelschema's van $\mathbb{P}^r$ met Hilbertpolynoom $P(z) = dz - p_a + 1$ (dus bijvoorbeeld krommen in $\mathbb{P}^2$ van graad d en arithmetisch geslacht p_a) Preciezer:

(2.6) Definitie Het Hilbertschema $\mathcal{H}_{d,p_a,r}$ is een schema dat de functor $Hilb_{d,p_a,r}$ representeert, waarbij

$$Hilb_{d,p_a,r} : S \longmapsto \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{C} \\ \downarrow \\ S \end{array} : \text{projectieve platte familie van deelschema's van } \mathbb{P}^r \text{ met Hilbertpolynoom } P(z) \right\}.$$

(2.7) <u>Stelling</u> (1) $\mathcal{H}_{d,p_a,r}$ bestaat en is projectief

(2) er is een universele familie $\begin{array}{c}\mathcal{C}_{d,p_a,r}\\ \downarrow \\ \mathcal{H}_{d,p_a,r}\end{array}$, projectief en plat,

zodat voor elk schema S de afbeelding

$$\{\text{morfismen } S \to \mathcal{H}_{d,p_a,r}\} \to \mathrm{Hilb}_{d,p_a,r}(S),$$

gegeven door aan $S \xrightarrow{f} \mathcal{H}_{d,p_a,r}$ toe te voegen de teruggehaalde van de universele familie naar S via f, bijectief is

Idee van het bewijs (naar [C&S]).

Bewezen wordt het bestaan van een geheel getal m zodat

$$P(n) = \dim_{\mathbb{C}} S_n(C) \qquad \text{als } n \geq m$$

voor <u>elk</u> deelschema C met homogene coördinatenring

$S = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_n(C)$ en Hilbertpolynoom $P(z) = dz - p_a + 1$

Het homogene ideaal I_C van C wordt nu in graad $n \geq m$ voortgebracht door $I_C(m)$, het deel van graad m. Het deelschema $C \subset \mathbb{P}^r$ wordt <u>bepaald</u> door de vectorruimte $I_C(m)$, van codimensie $P(m)$ in $S(m, r+1)$ de ruimte van homogene polynomen van graad m in $r+1$ variabelen.

We vinden zo een injectie {gesloten deelschema's van $\mathbb{P}^2$ met Hilbertpolynoom $P(z)$} $\xrightarrow{i}$ $\mathcal{G}(N-P(m), N) = \mathcal{G}$, waarbij $N = \dim \mathbb{P}(S(m, r+1))$ en $\mathcal{G}$ de Grassmannvariëteit van deelruimten van $S(m, r+1)$ van codimensie $P(m)$.
Het beeld van deze afbeelding is de drager van het Hilbertschema. We gaan niet in op hoe precies lokaal vergelijkingen worden gevonden die de schemastructuur bepalen. $\mathcal{H}_{d,p_a,r}$ zal een gesloten deelschema zijn van de Grassmann-variëteit. Beperken we nu de tautologische bundel op $\mathcal{G}$ tot $\mathcal{H}_{d,p_a,r}$, dan vinden we lokaal op een omgeving U regulier variërende voortbrengers $f_i(\hat{C})$ van de vezels $I_C(m)$, waarbij $\hat{C} \in U \subset \mathcal{H}_{d,p_a,r}$. De universele familie $\mathcal{C}_{d,p_a,r}$ wordt nu lokaal boven U gedefinieerd als het deelschema van $U \times \mathbb{P}^2$ bepaald door de vergelijkingen $f_i(\hat{C})$ QED.

Nu hebben we een ruimte $\mathcal{H}_{d,p_a,r}$ die ingebedde krommen $C \subset \mathbb{P}^2$ parametriseert. Hoe krijgen we nu hiermee de moduliruimte $\mathcal{M}_g$, die isomorfieklassen van krommen van geslacht g parametriseert?

Laat C een gladde kromme zijn van geslacht $g \geq 2$. Beschouw nu de trikanonieke afbeelding

$$C \xrightarrow{T_C} \mathbb{P}H^0(\omega_C^3) \simeq \mathbb{P}^{5g-6}$$

Dit is steeds een inbedding [Hart IV3.2]. Het beeld heeft graad $6g-6$. Twee krommen C en C' zijn juist dan isomorf (via een isomorfisme φ) als er een projectief lineaire transformatie $\varphi^* \in PGL(5g-5)$ is, zodat

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{T_C} & \mathbb{P}H^0(\omega_C^3) \\ \varphi\downarrow & & \uparrow\varphi^* \\ C' & \xrightarrow[T_{C'}]{} & \mathbb{P}H^0(\omega_{C'}^3) \end{array}$$

commuteert. Laat $\mathcal{H}_g \subset \mathcal{H}_{6g-6,\,g,\,5g-6}$ de deelruimte zijn van trikanoniek ingebedde gladde krommen. Dan werkt $PGL(5g-5)$ hierop op voor de hand liggende wijze.

(2.8) Definitie $\mathcal{M}_g = \mathcal{H}_g / PGL(5g-5)$ als verzameling $(g \geq 2)$.

(2.9) <u>Stelling-Definitie</u> $\mathcal{M}_g$ is een variëteit, de <u>moduliruimte van gladde krommen van geslacht g</u>.

Bewijs. Dit wordt uiteengezet in [M-GIT].

2.4 <u>Enige feiten over de moduliruimte $\mathcal{M}_g$</u>

$\mathcal{M}_g$ is een irreducibele, quasiprojectieve normale variëteit, in het algemeen singulier. De singulariteiten komen van krommen met automorfismen. Voor $g \le 2$ is $\mathcal{M}_g$ affien, voor $g \ge 3$ echter niet en bestaat bijvoorbeeld door elk punt van $\mathcal{M}_g$ een complete kromme binnen $\mathcal{M}_g$ (het vinden van concrete voorbeelden daarvan stuit echter op problemen) Er blijkt een natuurlijke compactificatie van $\mathcal{M}_g$ te bestaan, de <u>moduliruimte van stabiele krommen van geslacht g</u>, $\overline{\mathcal{M}}_g$, die op analoge wijze ontstaat en als drager juist de verzameling stabiele krommen van arithmetisch geslacht g heeft. $\overline{\mathcal{M}}_g$ bevat $\mathcal{M}_g$ als dicht open deel en blijkt projectief te zijn. De 'rand' $\partial\overline{\mathcal{M}}_g =$

$\overline{\mathcal{M}}_g \setminus \mathcal{M}_g$ is een divisor met $[g/2]+1$ irreducibele componenten $\Delta_0, \ldots, \Delta_{[g/2]}$. Hierbij is Δ_0 de afsluiting van de verzameling irreducibele singuliere stabiele krommen en Δ_i (voor $i>0$) de afsluiting is van de verzameling stabiele krommen met 2 irreducibele componenten van geslacht i respectievelijk $g-i$ (Bekijk nogmaals figuur 1 voor het geval $g=2$) De dimensie van $\mathcal{M}_g$ en $\overline{\mathcal{M}}_g$ is g voor $g=0,1$ en $3g-3$ voor $g \geq 2$.

$\overline{\mathcal{M}}_g$ is unirationaal voor $g \leq 13$, en voor $g \geq 23$ van algemeen type. Over de tussenliggende ruimten is weinig bekend wat dit betreft.

3 INTERSECTIETHEORIE OP MODULIRUIMTEN VAN KROMMEN

3.1 Inleiding

We kunnen voor de moduliruimten $\overline{\mathcal{M}}_g$ een geschikte snijtheorie zoeken. De standaardtheorie (zie bijv. [Hart Appendix A]) is niet zonder meer toepasbaar, aangezien de modulieruimten in het algemeen singulier zijn. Mumford heeft in [M-Enum] een snijtheorie ontwikkeld die wel toepasbaar is. Hij definieert een Chow-ring en chernse klassen, die zich functorieel goed gedragen. Er wordt gewerkt over de rationale getallen, dat wil zeggen de coëfficiënten van de cykels en de snijgetallen zijn rationaal. Het artikel van Mumford is goed samengevat in [F].

Er blijken verbanden te zijn met de natuurkunde: de theorie van de twee-dimensionale zwaartekracht geeft aanleiding tot vermoedens die de snijgetallen tussen bepaalde tautologische klassen zouden bepalen [W]. Deze vermoedens kunnen deels bewezen worden. *

* Het schijnt zelfs dat ze inmiddels zijn bewezen.

3.2 <u>De moduliruimten van gepuncteerde krommen</u>

Analoog aan de ruimte $\mathcal{M}_g$ beschouwen we de ruimte $\mathcal{M}_{g,n}$, die gladde krommen van geslacht g parametriseert met als extra structuur n verschillende genummerde punten $x_1, \dots x_n$. Het analogon van het begrip familie in deze context is een platte familie van krommen als vroeger, nu echter voorzien van n secties $x_1, \dots, x_n$.

Ook deze ruimte heeft een compactificatie $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, die de zogenaamde <u>n-stabiele krommen</u> parametriseert, dat wil zeggen samenhangende gereduceerde complete krommen met ten hoogste knopen als singulariteiten en als extra structuur n verschillende genummerde gladde punten $x_1, \dots, x_n$, zodat bovendien elk niet-singuliere rationale irreducibele component tenminste 3 van de genummerde of singuliere punten bevat. Een isomorfisme van n-stabiele krommen moet natuurlijk corresponderende genummerde punten in elkaar overvoeren.

De ruimte $\overline{\mathcal{M}}_{g,1}$ wordt vaak de universele familie van krommen genoemd, maar alleen boven het open stuk $\overline{\mathcal{M}}_g^{\circ}$ in $\overline{\mathcal{M}}_g$ van krommen zonder automorfismen (van codimensie 2 in $\overline{\mathcal{M}}_g$) heeft een echte universele familie $\overline{\mathcal{M}}_{g,1}^{\circ} \subset \overline{\mathcal{M}}_{g,1}$, zoals bedoeld in §2.2. Merk op dat de vezel van $\overline{\mathcal{M}}_{g,1} \to \overline{\mathcal{M}}_g$ boven een punt $[C]$ * juist $C/\mathrm{Aut}\,C$ is.

Algemener hebben we afbeeldingen $\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1} \xrightarrow{\pi} \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, gegeven door van een $(n+1)$-stabiele kromme een punt te vergeten (dat we dan x_0 zullen nummeren) en eventueel rationale componenten samen te trekken om de kromme n-stabiel te maken (Figuur 2 geeft een idee) We zullen π wel de <u>universele kromme</u> over $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ noemen en $\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}$ dan noteren met $\mathcal{C}\,\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$.

* Met $[C]$ geven we het punt in de moduliruimte $\overline{\mathcal{M}}_g$ aan, dat hoort bij de kromme C.

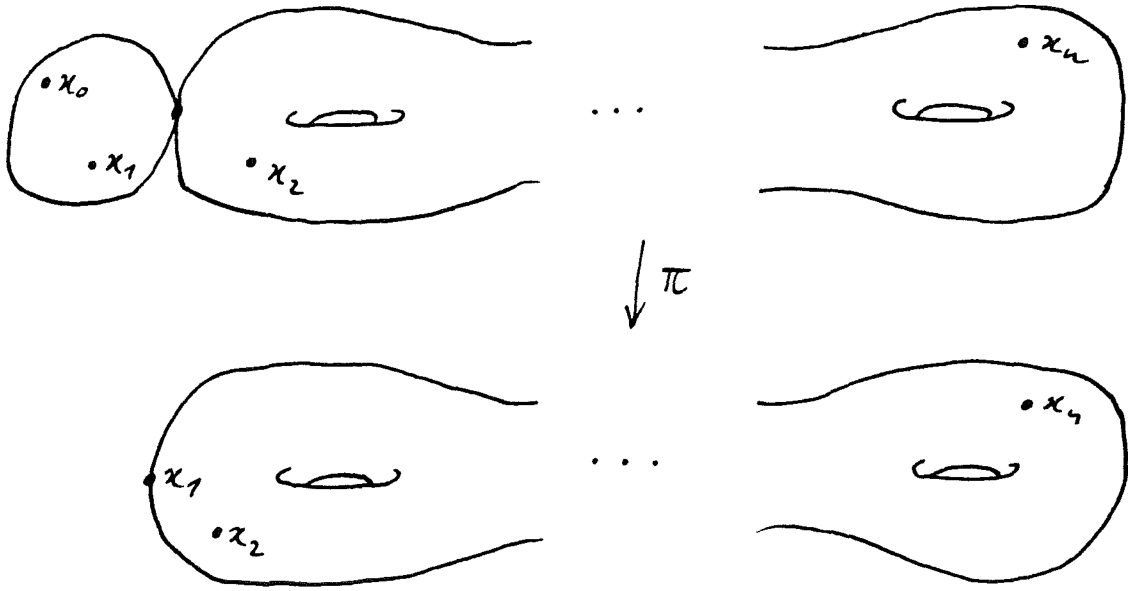


Fig. 2

De dimensie van $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ en $\mathcal{M}_{g,n}$ is $3g-3+n$ (behalve voor de ontaarde gevallen $n \leq 2$ bij $g=0$ en $n=0$ bij $g=1$)

3.3 De beschouwde cohomologieklassen

Chernse klassen van natuurlijke bundels zijn eerste kandidaten van te beschouwen cohomologieklassen. Bij een familie krommen $\mathcal{X} \xrightarrow{f} T$ hebben we de Hodgebundel ω_f op T met als vezel boven $t \in T$ de ruimte van differentialen $H^0(X_t, \omega_{X_t})$. Het is de bundel bepaald door de neergeduwde ('pushforward') onder f van de relatief dualiserende schoof van f op $\mathcal{X}$.

We zouden nu hetzelfde willen doen op $\overline{\mathcal{M}}_g$ en $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, maar er bestaat niet in het algemeen een universele familie. Mumford's oplossing is zekere 'niveau-n-structuren' te beschouwen. We zullen hier verder niet op ingaan, maar belangrijk is dat Mumford's Hodge-'bundels' bij echte families $\mathcal{X} \xrightarrow{f} T$ terugtrekken op de Hodgebundels ω_f. Wij zullen volstaan met de volgende intuïtieve beschrijving:

Op $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ beschouwen we bundels ω_i $(i = 1, \dots, n)$ met als vezel boven een punt $[C, x_1, \dots, x_n]$, bepaald door de kromme C met punten $x_1, \dots, x_n$, de coraakruimte in het punt x_i. (Merk op dat de genummerde punten glad zijn.) Beschouwen we de genummerde punten als secties van de universele kromme $\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1} \xrightarrow{\pi} \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, dan geldt $\omega_i = x_i^* K_\pi$, waarbij K_π de coraakbundel langs de vezels van π is.

(3.1) Definitie De tautologische klassen op $\overline{M}_g$ zijn de klassen:

$$\kappa_l := \pi_*(c_1(\omega_1)^{l+1}) \in Ch^l(\overline{M}_g), \quad l = 0, 1, 2 \ldots$$

waarbij $\pi: \overline{M}_{g,1} \to \overline{M}_g$ de universele kromme over $\overline{M}_g$ is, ω_1 op $\overline{M}_{g,1}$ leeft, c_1 de eerste Chernse klasse aangeeft en $Ch^l(\overline{M}_g)$ de Chowgroep van $\overline{M}_g$ in graad l is. Verder beschouwen we de klassen:

$$\tau_{d_i} := c_1(\omega_i)^{d_i} \in Ch^{d_i}(\overline{M}_{g,n}) \quad (d_i \in \mathbb{N},\ i = 1, \ldots, n)$$

waarbij ω_i op $\overline{M}_{g,n}$ leeft.

(3.2) Definitie $\langle \prod_{i=1}^n \kappa_{r_i} \rangle = \langle \kappa_{r_1} \cdots \kappa_{r_n} \rangle := \bigwedge_{i=1}^n \kappa_{r_i} \in Ch^{3g-3}(\overline{M}_g) \simeq \mathbb{Q}$.

$$\langle \prod_{i=1}^n \tau_{d_i} \rangle = \langle \tau_{d_1} \cdots \tau_{d_n} \rangle := \bigwedge_{i=1}^n \tau_{d_i} \in Ch^{3g-3+n}(\overline{M}_{g,n}) \simeq \mathbb{Q}.$$

als voldaan is aan de dimensievergelijkingen

$$\sum_{i=1}^n r_i = 3g-3 \quad \text{respectievelijk} \quad \sum_{i=1}^n d_i = 3g-3+n.$$

Als deze formules geen $g \in \mathbb{N}$ opleveren, stellen we de symbolen gelijk aan nul.

(3.3) Opmerking (1) door de dimensievergelijkingen zijn deze symbolen dus juist de rationale snijgetallen van onze cohomologieklassen.

(2) De volgorde van de factoren κ_{r_i} respectievelijk τ_{d_i} is vrij, want het zijn even klassen. We gebruiken dan ook wel de notatie $\langle \prod_{i=0}^{p} \tau_i^{n_i} \rangle$ als er n_0 factoren τ_0, n_1 factoren τ_1 etcetera zijn.

(3.4) <u>Stelling</u> De snijgetallen $\langle \prod \tau_{d_i} \rangle$ bepalen de getallen $\langle \prod \kappa_{r_i} \rangle$ en omgekeerd.

Eerst bewijzen we een lemma, waarin we het gedrag van de cohomologieklassen onderzoeken onder de afbeelding $\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1} \xrightarrow{\pi} \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ zoals eerder besproken. Laat D_i de divisor zijn op $\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}$, die krommen parametriseert met een rationale component die x_0, x_i en een dubbelpunt bevat. Naïef zou men verwachten dat de gedefinieerde bundels op $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ gewoon onder π terugtrekken op de corresponderende op $\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}$. In feite geldt het volgende.

(3.5) <u>Lemma</u> $\omega_i = \pi^* \omega_i' \otimes \mathcal{O}(D_i)$, dus voor Chernse klassen $c_1 \omega_i = \pi^* c_1 \omega_i' + [D_i]$ (notaties in het bewijs)

Bewijs. We hebben de volgende situatie: *

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C}\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1} & \underset{x_i}{\overset{\pi_{n+1}}{\rightleftarrows}} & \overline{\mathcal{M}}_{g,n+1} \\
\pi_C \downarrow & & \downarrow \pi \\
\mathcal{C}\overline{\mathcal{M}}_{g,n} & \underset{x_i}{\overset{\pi_{n}}{\rightleftarrows}} & \overline{\mathcal{M}}_{g,n}
\end{array}$$

met bundels $K = K_{\pi_{n+1}}$ $\qquad \omega_i = x_i^* K$

$K' = K_{\pi_n}$ $\qquad \omega_i' = x_i^* K' \quad (i = 1, \dots, n)$.

Zij nu $s \neq 0$ een lokale sectie van K'. Dan zal $\pi_C^* s$ juist verdwijnen op componenten in de vezels die op een punt worden afgebeeld, dat wil zeggen juist op een divisor met support $x_i(D_i)$ in $\mathcal{C}\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}$ (Iets dergelijks gebeurt weliswaar op rationale componenten met x_0 en 2 dubbelpunten, maar dat is in codimensie 2 dus doet hier niet terzake) Dus het terugtrekken onder π van een willekeurige lokale sectie $x_i^* s$ van ω_i', levert een lokale sectie $\pi^* x_i^* s = x_i^* \pi_C^* s$ van ω_i, die juist verdwijnt op D_i, en wel enkelvoudig, zoals onderzoek van de lokale structuur van de moduliruimte moet uitwijzen. QED

* Dat twee afbeeldingen x_i heten zal geen verwarring geven.

Bewijs stelling (3.4): Allereerst schrijven we het snijgetal $\langle \prod \kappa_{a_i} \rangle$ op een manier meer analoog aan die van $\langle \prod \tau_{d_i} \rangle$.

Definieer $\mathcal{C}_n \overline{\mathcal{M}}_g := \mathcal{C}_{(1)} \overline{\mathcal{M}}_g \times_{\overline{\mathcal{M}}_g} \cdots \times_{\overline{\mathcal{M}}_g} \mathcal{C}_{(n)} \overline{\mathcal{M}}_g$,

waar $\mathcal{C}_{(i)} \overline{\mathcal{M}}_g = \overline{\mathcal{M}}_{g,1}$, $i = 1, \ldots, n$. Laat π_i de projectie zijn op de i^e factor en definieer $\tilde{\omega}_i := \pi_i^* K_i$, waarbij K_i de coraakbundel langs de vezels van π_i op $\mathcal{C}_n \overline{\mathcal{M}}_g$ is.

We hebben dan $\langle \prod \kappa_{d_i - 1} \rangle = \prod_{i=1}^{n} c_1(\tilde{\omega}_i)^{d_i}$ (op $\mathcal{C}_n \overline{\mathcal{M}}_g$).

De ruimte $\mathcal{C}_n \overline{\mathcal{M}}_g$ parametriseert stabiele krommen met n punten, die kunnen samenvallen. Gevolg is dat de natuurlijke birationale afbeelding $\overline{\mathcal{M}}_{g,n} \dashrightarrow \mathcal{C}_n \overline{\mathcal{M}}_g$ niet gedefinieerd is langs een of andere divisor in de rand. Vergelijken we het gedrag van de ω_i's respectievelijk de $\tilde{\omega}_i$'s onder deze afbeelding, dan vinden we relaties van de vorm:

$$\langle \kappa_{d_1 - 1} \cdots \kappa_{d_n - 1} \rangle = \langle \tau_{d_1} \cdots \tau_{d_n} \rangle - \big(\langle \tau_{d_1 + d_2 - 1} \tau_{d_3} \cdots \tau_{d_n} \rangle +$$

soortgelijke termen met de d_i's gepermuteerd$\big) + \big(\langle \tau_{d_1 + d_2 + d_3 - 3} \cdots \tau_{d_n} \rangle$

$+$ permutaties$\big) - \cdots + (-1)^{n+1} \langle \tau_{d_1 + d_2 + \cdots + d_n - n + 1} \rangle$.

We voeren dit uit voor $n = 1$ en 2.

$n=1$: $\langle \kappa_{d_1-1} \rangle = \pi_* \, c_1(\omega_1)^{d_1}$ op $\overline{\mathcal{M}}_g$

$= c_1(\omega_1)^{d_1}$ op $\overline{\mathcal{M}}_{g,1}$ $= \langle \tau_{d_1} \rangle$

$n=2$: te bewijzen is $\langle \kappa_{d_1-1} \kappa_{d_2-1} \rangle = \langle \tau_{d_1} \tau_{d_2} \rangle - \langle \tau_{d_1+d_2-1} \rangle$

ofwel (met het geval $n=1$) $\langle \tau_{d_1} \tau_{d_2} \rangle = \langle \kappa_{d_1-1} \kappa_{d_2-1} \rangle + \langle \kappa_{d_1+d_2-2} \rangle$

We nemen aan dat $d_1, d_2 > 0$, wat kan op grond van de string-vergelijking die later wordt bewezen. We hebben de volgende situatie:

$$\begin{tikzcd} & \overline{\mathcal{M}}_{g,2} \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ \overline{\mathcal{M}}_{g,1}^{(1)} & & \overline{\mathcal{M}}_{g,1}^{(2)} \end{tikzcd}$$

waar (grof gezegd) π_1 het punt x_2 vergeet, π_2 het punt x_1 en

$\overline{\mathcal{M}}_{g,1}^{(i)} = \overline{\mathcal{M}}_{g,1}$ $(i=1,2)$, met de bundels $\omega_i = x_i^* K$ op

$\overline{\mathcal{M}}_{g,2}$ (K op $\mathcal{C}\overline{\mathcal{M}}_{g,2}$), $\omega_i' = x_i^* K'$ op $\overline{\mathcal{M}}_{g,1}^{(i)}$ (K_i' op $\mathcal{C}\overline{\mathcal{M}}_{g,1}^{(i)}$).

Met het lemma hebben we: $c_1 \omega_2 = \pi_2^* c_1 \omega_2' + [D]$,

waar D de divisor is die kromme parametriseert met een gladde rationale component die x_1, x_2 en 1 dubbelpunt bevat.

Merk op dat $\omega_1|_D$ triviaal is: het punt x_1 leeft in de universele kromme op een rigide component (dat wil zeggen, zonder deformaties), namelijk een gladde rationale kromme met 3 bijzondere punten. Daarom volgt nu via het lemma

$$c_1\,\omega_1 = \pi_1^*\, c_1\,\omega_1' + [D]$$

gemakkelijk dat geldt:

$$c_1(\omega_1)^{d_1} = \pi_1^*\, c_1(\omega_1')^{d_1} + [D]\;\; \pi_1^*\, c_1(\omega_1')^{d_1-1}$$

We hebben dus

$$\begin{aligned} \langle \tau_{d_1}\tau_{d_2}\rangle &= c_1(\omega_1)^{d_1} \wedge c_1(\omega_2)^{d_2} \quad (\text{op } \overline{M}_{g,2}) \\ &= c_1(\omega_1)^{d_1} \wedge \pi_2^*\, c_1(\omega_2')^{d_2} \; (\text{op } \overline{M}_{g,2}) \\ (*) \qquad &= \pi_1^*\, c_1(\omega_1')^{d_1} \wedge \pi_2^*\, c_1(\omega_2')^{d_2} \; (\text{op } \overline{M}_{g,2}) \\ &\quad + \pi_1^*\, c_1(\omega_2')^{d_2} \wedge \pi_2^*\, c_1(\omega_2')^{d_2} \; (\text{op } D). \end{aligned}$$

Er geldt: $D \xrightarrow[\pi_i]{\sim} \overline{M}_{g,1}^{(i)} = \overline{M}_{g,1}$

waarbij $(\pi_i^*\,\omega_i')|_D = K_{D/M}$, de coraakbundel langs de vezels van $D \simeq \overline{M}_{g,1} \to \overline{M}_g$. Dus de laatste term van (*) is juist $c_1(K_{D/M})^{d_1+d_2-1}(\text{op } D) = \langle \kappa_{d_1+d_2-2}\rangle$.

Er is een natuurlijk isomorfisme $\overline{M}_{g,2} \simeq \mathcal{C}_2\overline{M}_g$, ook al parametriseren deze ruimten niet dezelfde verzameling krommen. Bovendien corresponderen onder dit isomorfisme de bundels $\pi_i^* \omega_i'$ op $\overline{M}_{g,2}$ en $\tilde{\omega}_i$ op $\tau_2 \overline{M}_g$, zodat de eerste term van $(*)$ juist gelijk is aan $\langle \kappa_{d_1-1} \kappa_{d_2-1} \rangle$. QED

3.4. Het vermoeden van Witten

Voor we nu het vermoeden van Witten formuleren voeren we enige notaties in

(3.6) Definitie $F(t_0, t_1, t_2, \ldots) = \sum_{\{n_k\}_{k=0}^{\infty}} \left(\prod_{i=0}^{\infty} \frac{t_i^{n_i}}{n_i!} \langle \prod_{j=0}^{\infty} \tau_j^{n_j} \rangle \right)$

waarbij de sommatie loopt over rijtjes $\{n_k\}$ met $n_k = 0$ voor bijna alle k.

F is dus een formele machtreeks in aftelbaar veel variabelen $t_0, t_1, t_2 \ldots$

Voor het ontaarde geval, waar $n_k = 0 \ \forall k$, is het natuurlijk te definiëren: $\langle 1 \rangle = -\frac{1}{12}$, de Euler-karakteristiek van $\overline{M}_{1,0}$.

De coëfficiënt $\langle \prod_{j=0}^{\infty} \tau_j^{n_j} \rangle$ is nul als de dimensievergelijking

$3g-3 = \sum_{j=0}^{\infty} n_j (j-1)$ geen $g \in \mathbb{N}$ oplevert.

$\langle\langle \prod_{i=1}^{n} \tau_{d_i} \rangle\rangle := \frac{\partial}{\partial t_{d_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial t_{d_n}} F(t_0, t_1, t_2, \ldots)$

Evalueren we deze functie in $t_i = 0 \ (\forall i)$ dan vinden we het snijgetal $\langle \prod_{i=1}^{n} \tau_{d_i} \rangle$ terug.

$U := \langle\langle \tau_0^2 \rangle\rangle$

(3.7) <u>Vermoeden</u> (Witten) F voldoet aan en wordt bepaald door de volgende twee eigenschappen :

(1) <u>KdV</u> $\quad \dfrac{\partial U}{\partial t_n} = \dfrac{\partial}{\partial t_0} R_{n+1} \qquad , n = 0, 1, 2, \dots$

waarbij de R_n zekere polynomen zijn in U en zijn afgeleiden naar t_0, gedefinieerd door de volgende recursievergelijking*

$$R_1 = U$$

$$\frac{\partial R_{n+1}}{\partial t_0} = \frac{1}{2n+1}\left(\frac{\partial U}{\partial t_0} R_n + 2U \frac{\partial R_n}{\partial t_0} + \frac{1}{4}\frac{\partial^3}{\partial t_0^3} R_n\right)$$

(2) <u>string</u> $\quad \dfrac{\partial F}{\partial t_0} = \dfrac{t_0^2}{2} + \sum_{i=0}^{\infty} t_{i+1} \dfrac{\partial F}{\partial t_i}$

(3.8) <u>Opmerking</u> Het is niet triviaal dat de recursievergelijking van de R_n polynomen oplevert.

Het vermoeden kan explicieter worden uitgeschreven met de snijgetallen.

* Witten vermeldt niet in zijn definitie van de polynomen R_n hoe de constante term gekozen moet worden. Die valt wel te berekenen met de door hem genoemde formule $R_{n+1} = \langle\langle \tau_n \tau_0 \rangle\rangle$, na substitutie van $t_i := 0 \forall i$.

(1) KdV $\langle\langle \tau_n \tau_0^2 \rangle\rangle_g = \frac{1}{2n+1} \Big(\sum_{g'=0}^{g} \langle\langle \tau_{n-1} \tau_0 \rangle\rangle_{g'} \langle\langle \tau_0^3 \rangle\rangle_{g-g'}$

$$+ 2 \sum_{g'=0}^{g} \langle\langle \tau_{n-1} \tau_0^2 \rangle\rangle_{g'} \langle\langle \tau_0^2 \rangle\rangle_{g-g'}$$

$$+ \frac{1}{4} \langle\langle \tau_{n-1} \tau_0^4 \rangle\rangle_{g-1} \Big)$$

waarbij het subscript g de bijdrage in geslacht g aangeeft.

(2) String $\langle \tau_0 \prod_{i=1}^{n} \tau_{d_i} \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle \prod_{i=1}^{n} \tau_{d_i - \delta_{ij}} \rangle + \delta_{n,2}\, \delta_{d_1,0}\, \delta_{d_2,0}$

(3.9) Stelling Door KdV en string liggen de getallen

$\langle \prod_{i=1}^{n} \tau_{d_i} \rangle$ vast.

Bewijs: met de stringvergelijking vinden we de beginvoorwaarde voor de KdV-differentiaalvergelijking: $U(t_0, 0, .., 0, ..) = t_0$, zodat U vastligt. Vanwege de string-vergelijking is het voldoende de getallen $T = \langle \tau_{d_1} .. \tau_{d_k} \rangle_g$ te vinden met alle $d_i > 0$. We passen nu neerwaartse inductie toe op het maximum van de $d_1, \dots, d_k$. De basis van de inductie vinden we door de dimensie-vergelijking: als er een i is met $d_i > 3g-2$ dan is $T = 0$. Bekijk nu een T waarbij d_1 maximaal is. We kennen dan $\langle \tau_{d_1+2} \tau_{d_2} \cdot\cdot \tau_{d_k} \tau_0 \tau_0 \rangle$, omdat

U vastligt. Passen we nu tweemaal de string-vergelijking toe, dan zijn we klaar (met de inductiehypothese), tenzij er factoren τ_1 of τ_2 onder $\tau_{d_2} \cdots \tau_{d_k}$ zijn: die kunnen weer een τ_0 opleveren. Passen we nu weer herhaald de string-vergelijking toe tot de τ_0's zijn verdwenen dan vinden we termen met minder factoren τ_1 of τ_2 zodat nu inductie naar het aantal τ_1's en τ_2's het argument afmaakt. QED

Voor referenties voor ondersteuning van het vermoeden vanuit de natuurkunde, zie [W]. In de intersectietheorie hebben we de volgende feiten in overeenstemming met het vermoeden:

(1) de voorspelde bijdragen in geslacht $g \leq 3$ blijken overeen te komen met berekeningen in de snijtheorie (zie [F] en [Ho]).

(2) de string-vergelijking kan bewezen worden.

(3) een gevolg van de string- en de KdV-vergelijking

kan bewezen worden, namelijk de zogenaamde <u>dilaton-vergelijking</u>. $\langle \tau_1 \prod_{i=1}^{n} \tau_{d_i} \rangle = (2g-2+n) \langle \prod_{i=1}^{n} \tau_{d_i} \rangle$

($n > 0$, $n=0$ is een gedegenereerd geval: $\langle \tau_1 \rangle = \frac{1}{24}$)

(3.10) <u>Bewijs stringvergelijking</u> Het ontaarde geval $\langle \tau_0^3 \rangle = 1$ volgt uit het feit dat $\overline{M}_{0,3}$ uit één punt bestaat, namelijk de isomorfieklasse van $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ met de punten $0, 1, \infty$ (merk op dat elke gladde rationale kromme met 3 genummerde punten hiermee op <u>unieke</u> wijze isomorf is). Merk nu eerst op dat $\omega_i|_{D_i}$ triviaal is, als in het bewijs van (3.4). (Notaties als eerder). Met lemma (3.5) volgt nu snel:

$$c_1(\omega_i)^n = \pi^* c_1(\omega_i')^n + [D_i].\pi^* c_1(\omega_i')^{n-1}$$

Verder geldt $[D_i].[D_j] = 0$ als $i \neq j$, want de dragers van D_i en D_j zijn disjunct, en $\pi^* \bigwedge_{i=1}^{n} c_1(\omega_i')^{d_i} = 0$ (op $\overline{M}_{g,n+1}$) vanwege de dimensievergelijking.

Merk op dat we hebben $(\overline{M}_{g,n+1} \supset) D_i \underset{\pi}{\cong} \overline{M}_{g,n}$ waarbij $(\pi^* \omega_i')|_{D_i} \simeq \omega_i'$.

Met enig rekenen volgt nu de string-vergelijking:

$$\langle \tau_0 \prod_{i=1}^{n} \tau_{d_i} \rangle = 1 \bigwedge_{i=1}^{n} c_1(\omega_i)^{d_i} \qquad \text{op } \overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}$$

$$= 1 \cdot \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\pi^* c_1(\omega_i')^{d_i} + [D_i]\, \pi^* c_1(\omega_i')^{d_i - 1}\right)$$

$$\text{op } \overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} 1 \cdot [D_j] \cdot \bigwedge_{i=1}^{n} \pi^* c_1(\omega_i')^{d_i - \delta_{ij}} \qquad \text{op } \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \bigwedge_{i=1}^{n} c_1(\omega_i')^{d_i - \delta_{ij}} \qquad \text{op } \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \langle \prod_{i=1}^{n} \tau_{d_i - \delta_{ij}} \rangle \qquad \text{QED.}$$

(3.11) <u>Bewijs dilaton-vergelijking</u> We weten $c_1(\omega_0)\,[D_i] = 0$ omdat ω_0 triviaal is op D_i. Herinneren we ons de situatie uit het bewijs van lemma (3.5). De afbeelding $\alpha := \pi_C \circ \varkappa_0$ levert een isomorfisme $\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1} \xrightarrow{\sim} C\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. We hebben nu een analogon van lemma (3.5):

$$\omega_0 = \alpha^* K' \otimes \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{O}(D_i)$$

wat wil zeggen dat differentiaalvormen op een n-stabiele kromme polen mogen hebben bij de genummerde punten. De bundel K' heeft langs de vezels van π_n graad $2g-2$

en dus heeft ω_0 graad $2g-2+n$ langs de vezels van π.

Nu volgt de dilaton-vergelijking met enig rekenen:

$$\begin{aligned}
\langle \tau_1 \prod_{i=1}^{n} \tau_{d_i} \rangle &= c_1(\omega_0) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} c_1(\omega_i)^{d_i} \quad \text{op } \overline{M}_{g,n+1} \\
&= c_1(\omega_0) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \pi^* c_1(\omega_i')^{d_i} \quad \text{op } \overline{M}_{g,n+1} \\
&= (2g-2+n) \bigwedge_{i=1}^{n} c_1(\omega_i')^{d_i} \quad \text{op } \overline{M}_{g,n} \\
&= (2g-2+n) \langle \prod_{i=1}^{n} \tau_{d_i} \rangle \qquad \text{QED.}
\end{aligned}$$

Literatuur

[A] E. Arbarello, Moduli spaces of algebraic curves, cursus te Rome, 6-10 mei 1991.

[C&S] C. Ciliberto en E. Sernesi, Families of varieties and the Hilbert scheme, Rome, syllabus 1990.

[E&H] D. Eisenbud en J. Harris, Progress in the theory of complex algebraic curves, Bull. of AMS 21(2), 205-232.

[F] C. Faber, Chow rings of moduli spaces of curves, proefschrift UvA, 1988

[G&H] P. Griffiths & J. Harris, Principles of Algebraic Geometry, Wiley-Interscience, New York, 1978

[Harr] J. Harris, Curves and their moduli, in: Algebraic Geometry, Bowdoin, 1985, Sympos. Pure Math. 46 I, 1987, 99-144.

[Hart] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Springer-Verlag, New York, 1977.

[Ho] J. Horne, Intersection theory and two dimensional gravity at genus 3 and 4, preprint 1990

[M-Enum] D. Mumford, Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves, in: Arithmetic and Geometry, eds M. Artin en J. Tate, Birkhäuser 1983.

[M-GIT] D Mumford en J. Fogarty, Geometric invariant theory, Springer-Verlag, Berlin 1982.

[W] E. Witten, Two dimensional gravity and intersection theory on moduli space, preprint mei 1990

Op de omslag is een stabiele kromme van geslacht 13 afgebeeld.